



Chapitre 7. Intégration généralisée

1 *Previously in* Intégration

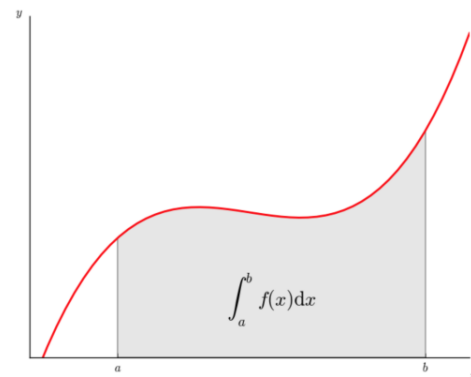
Depuis le cours de première année, on sait définir l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ fermé lorsque celle-ci y est **continue**.

Résultat du cours de première année

L'intégrale d'une fonction f (positive) entre a et b , notée

$$\int_a^b f(t)dt,$$

est l'aire de la surface délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$.



Si la fonction f n'est pas positive partout, on peut découper f en somme et différences de fonctions positives et définir l'intégrale entre a et b comme la combinaison correspondante des aires des surfaces correspondantes. On peut aussi étendre la définition de l'intégrale à une fonction f continue par morceaux (c'est à dire avec un nombre fini de points de discontinuité).

On rappelle le résultat fondamental ci-dessous, sans qui rien de tout ce qui va suivre ne serait possible.

À retenir!

Théorème fondamental de l'analyse.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors, pour tout $a \in I$, la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule en a . En particulier, F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $F'(x) = f(x)$.

☞ Le résultat précédent garantit l'existence de primitives pour toute fonction continue et donne une manière de calculer une intégrale. En effet, si on dispose d'une primitive G d'une fonction g , on peut alors calculer

$$\int_a^b g(t)dt = G(b) - G(a).$$

Exercice 1. Calculer, en primitivant à vue, les intégrales suivantes

$$(i) \int_0^1 \sqrt{t}dt, \quad (ii) \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx, \quad (iii) \int_0^{\ln(2)} te^{t^2}dt, \quad \int_1^x \frac{ds}{s}.$$

Résultat du cours de première année

Transformation d'intégrales.

☞ En travaillant avec la formule de dérivation d'un produit de fonctions u et v de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on obtient la formule d'**intégration par parties** (IPP)

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

☞ En travaillant avec la formule de dérivation d'une composée, on obtient la formule de **changement de variable**. Si u est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

Exercice 2. Calculer, avec un changement de variable, les intégrales

$$(i) \int_0^1 \frac{dt}{2t+1}, \quad (ii) \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt, \quad (iii) \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx, \quad (iv) \int_1^x \frac{\ln(t)^n}{t}dt.$$

Une question de la session 2022

On pouvait trouver, dans le sujet **ESSEC II**, la question suivante (Question 12 - (a)) :

À l'aide de plusieurs intégrations par parties successives, montrer que

$$\int_0^1 u^3(1-u)^3du = \frac{1}{20} \int_0^1 u^6du = \frac{1}{140}.$$

On ne peut hélas pas reprendre l'intégralité (sans mauvais jeu de mot) du cours de première année à ce propos. On encourage néanmoins la (re)lecture du polycopié de cours correspondant, disponible [ici](#).

L'objectif de ce chapitre est de définir, lorsque cela est possible l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $] - \infty, b]$ ou même $] - \infty, +\infty[$.

2 Extension de la notion d'intégrale

Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a; +\infty[$.

- (1) On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

- (2) Sinon, on dit que l'intégrale **diverge**.

- (3) On définit de la même façon lorsque f est continue sur $] -\infty; a]$,

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t)dt.$$

↳ Étudier la nature d'une intégrale signifie déterminer si l'intégrale est convergente ou non. Dans tous les cas, l'intégrale est dite **impropre** en $+\infty$.

Exercice 3. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i) \int_0^{+\infty} e^{-t}dt, \quad (ii) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}, \quad (iii) \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)}.$$

Remarque

Naturellement, on définit de même la convergence d'une intégrale impropre en $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt \text{ converge} \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt \text{ est finie..}$$

Définition

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . On dit que l'intégrale (doublement impropre)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

est convergente si et seulement si, pour tout réel c , les **deux** intégrales impropres

$$\int_c^{+\infty} f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^c f(t)dt$$

sont convergentes séparément. Auquel cas,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_c^{+\infty} f(t)dt + \int_{-\infty}^c f(t)dt$$

Exercice 4. Soit $f : t \mapsto t^3$.

- (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_{-x}^x f(t)dt$.

- (2) Contre quoi a-t-on voulu mettre en garde un.e étudiant.e peu concentré.e ?

Exercice 5. Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|+1}dt$.

Exercice 6. (***) On considère la fonction f , affine par morceaux, nulle sur \mathbb{R}_- , définie et **continue** sur \mathbb{R} comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $f\left(\frac{n+1}{2}\right) = 1$;
- sur $[n, n+1]$, f est nulle en dehors de $\left[\frac{n+1}{2} - \frac{1}{n^2}; \frac{n+1}{2} + \frac{1}{n^2}\right]$.

- (1) (a) Dessiner l'allure de la courbe de f .
(b) Justifier que $f(x)$ n'admet pas de limite lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- (2) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_n^{n+1} f(t)dt$ puis $\int_0^n f(t)dt$. En déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.
- (3) À quelle propriété tentante vient-on de construire un contre-exemple?

Remarque

Les notions d'intégrales convergentes (redéfinies ci-dessus) peuvent naturellement être étendus aux fonctions continues par morceaux et notamment aux fonctions présentant un **nombre fini de points de discontinuité**.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

Propriété

Les propriétés sur les intégrales impropres (linéarité, positivité, croissance) découlent de celles sur les intégrales définies sur un segment par restriction de l'intervalle et passage à la limite. Attention, toutes les inégalités sont **larges**.

Hors Programme mais...

On peut aussi s'intéresser à d'autres types d'intégrales impropres, comme celle sur un intervalle semi-ouvert sur type $]a, b[$ ou $[a; b[$ (ou même $]a, b[$) où a serait une valeur interdite de f .

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge} \iff \lim_{\varepsilon \rightarrow a} \int_{\varepsilon}^b f(t)dt \text{ est finie.}$$

Exercice 8. Montrer la convergence et calculer l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Exercice 9.

- (1) Montrer que la fonction $g : x \mapsto x \ln(x) - x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée $g'(x)$.
- (2) Montrer la convergence et calculer l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$.

☞ Tous les résultats de ce cours à propos d'intégrales impropres sur des intervalles semi-ouverts infinis s'**adaptent** aux intégrales impropres sur des intervalles semi-ouverts bornés (sans difficulté).

3 Techniques de calcul

3.1 Intégration par parties ou changement de variables

À retenir!

☞ **IPP ou un changement de variable sur des intégrales impropres.**

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$ (ou $] -\infty, b]$ ou même \mathbb{R}) dont l'intégrale impropre sur le même intervalle converge.

Pour **calculer** cette intégrale impropre en intégrant par partie ou par changement de variable, on suit les étapes suivantes.

- (1) On **restreint l'intervalle d'intégration** à $[a; x]$ avec $x \geq a$.
- (2) On effectue une intégration par parties ou un changement de variable classique sur l'intégrale définie

$$\int_a^x f(t) dt.$$

- (3) On passe à la limite quand x vers $+\infty$.

☠ ☠ ☠ On ne fera donc **jamais** d'IPP directement sur un intervalle du type $[a; +\infty[$ ou $] -\infty; +\infty[$.

Exercice 10. Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$.

Question type de sujet de concours

Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse aux intégrales impropres

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

- (1) Justifier que I_0 converge et donner sa valeur.
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} dt = (n+1) \int_0^A t^n e^{-t} dt - A^{n+1} e^{-A}.$$

- (3) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale convergente et que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.
- (4) Obtenir alors une formule pour I_n , que l'on démontrera par une autre récurrence.

Exercice 11. À l'aide du changement $u = \sqrt{t}$, montrer la convergence et calculer l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$.

Exercice 12.

- (1) En remarquant que $\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}$, calculer, pour $b > a > 1$, l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{t^2 - 1}$.
- (2) À l'aide du changement de variables $t = \sqrt{x^2 + 1}$, montrer la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3.2 Utilisation de la parité

Propriété

Soit f une fonction continue \mathbb{R} .

(1) Si la fonction f est **paire**, alors

$$\int_{-a}^a f(t)dt \text{ converge} \iff \int_0^a f(t)dt \text{ converge}$$

Dans ce cas (et **uniquement dans ce cas**)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

(2) Si la fonction f est **impaire**,

$$\int_{-a}^a f(t)dt \text{ converge} \iff \int_0^a f(t)dt \text{ converge}$$

Dans ce cas (et **uniquement dans ce cas**)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0.$$

Exercice 13. Soit f la fonction sur \mathbb{R} définie par $f(t) = \frac{2t}{e^t + e^{-t}}$.

(1) Montrer que f est impaire.

(2) Montrer que $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge.

(3) Montrer que

$$f(t) \sim 2te^{-t}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

(4) Dédurre des questions précédentes (en anticipant un peu sur ce qui arrive) que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$.

4 Critères de convergence

4.1 Intégrales de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des **intégrales de référence** que l'on peut utiliser comme du cours.

À connaître sur le bout des doigts

Convergence des intégrales de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

Remarque

On peut remplacer la borne de gauche par n'importe quel réel $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

4.2 Critère de comparaison par inégalité (pour des fonctions positives)

Dans les trois prochains résultats on considère une fonction f continue sur $[a; +\infty[$. Naturellement, ces résultats s'adaptent à des fonctions continues et positives sur $] -\infty; b]$.

Propriété**Critère de comparaison.**

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a; +\infty[$ telles que

$$\forall t \geq a, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors,

$$(1) \quad \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge};$$

$$(2) \quad \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ diverge} \implies \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ diverge}.$$

Exercice 14. Déterminer la nature des intégrales

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + t + 1} dt, \quad (ii) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + \ln(1+t)}.$$

4.3 Critère de comparaison par négligeabilité (pour des fonctions positives)**Propriété****Critère de comparaison par négligeabilité.**

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a; +\infty[$ telles que

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t)).$$

$$(1) \text{ Si } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ converge, alors } \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge.}$$

$$(2) \text{ Si } \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ diverge, alors } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ diverge.}$$

À connaître sur le bout des doigts**Test de Riemann.**

Si f est positive et $t^2 f(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$, alors $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Exercice 15. Montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

4.4 Critère de comparaison par équivalence (pour des fonctions positives)**Propriété**

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a; +\infty[$ telles que

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t).$$

Alors, les intégrales $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ont la même nature.

Exercice 16. Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{-\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha} dt$.

4.5 Fonctions de signe quelconque

Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ est convergente.

Propriété

Si l'intégrale de f sur $[a; +\infty[$ converge absolument, alors elle est convergente

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|dt \text{ converge} \implies \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge.}$$



La réciproque est fautive! (L'intégrale peut être convergente sans être absolument convergente.)

5 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 701. Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ainsi que leur valeur en cas de convergence.

$$(i) \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}, \quad (ii) \int_1^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2}, \quad (iii) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx,$$

$$(iv) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad (v) \int_2^{+\infty} \frac{dt}{3^t}, \quad (vi) \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

Exercice 702. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 3t^2 + 1}}, \quad (ii) \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx, \quad (iii) \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^3 \ln(t)},$$

$$(iv) \int_0^{+\infty} u^k e^{-u^2} du \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (v) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \ln(1+t^2) + 1}, \quad (vi) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx.$$

$$(vii) \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} dx.$$

Exercice 703. (D'après **EML 2017**) On considère la fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x - e \ln(x).$$

(1) L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge-t-elle?

(2) Montrer que, pour tout $x \geq 2$, $2 \ln(x) \leq \frac{e^x}{3}$. En déduire la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

Exercice 704. On considère la fonction R , définie sur \mathbb{R}_+ par $R(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $R(x)$ est bien une intégrale convergente. Que vaut la limite de $R(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$?

(2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$R(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Exercice 705. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on définit sur \mathbb{R} , la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente, où $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

(2) On **admet** que $I_0 = \sqrt{\pi/2}$. Calculer I_1 .

(3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(4) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}, \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

Exercice 706. (Extrait de **DM n°5**, Automne 2020). On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} dx.$$

(1) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

(2) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.

(3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n$$

(4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!.$$

Exercice 707. (Extrait de **DM n°8**, Printemps 2022) On pose

$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)} dt.$$

(1) Déterminer le domaine de définition de H , c'est à dire l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale ci-dessus est convergente.

(2) Justifier que $H(x) \rightarrow 0$, lorsque $x \rightarrow +\infty$.

(3) Justifier que H est \mathcal{C}^1 sur son ensemble de définition et que

$$H'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2(1+x)}.$$

En déduire les variations de H .

(4) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} H(x)dx$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} H(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} - H(0).$$

(5) On définit une suite (x_n) en posant $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = H(x_n)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien définie et que $x_n > 0$.

(b) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $H(\alpha) = \alpha$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x_n - \alpha|.$$

(d) En déduire la convergence de (x_n) .

Problème de synthèse

Cet exercice a été posé lors du **DS n°2**, à l'Automne 2020.

On rappelle, pour cet exercice, qu'est admise, dans le cours la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

dont on sait en revanche démontrer la convergence.

Partie A : Un équivalent par télescopage

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}, \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

- (1) On **admet** la formule de Taylor à l'ordre 3 énoncé comme suit. Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^3 au voisinage de 0, alors

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(0)}{3!}t^3 + o(t^3), \quad t \rightarrow 0.$$

Justifier que la formule s'applique et exprimer le développement limité de $\ln(1+t)$ à l'ordre 3 en 0.

- (2) Montrer soigneusement que, pour $n \rightarrow +\infty$, on a

$$v_n \sim \frac{1}{12n^2}.$$

- (3) En déduire la convergence de la série $\sum v_n$ puis l'existence d'une constante $\kappa > 0$ telle que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n} e^{-n} n^n}{\kappa}.$$

Partie B : Une première suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt.$$

- (4) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et décroissante.
 (5) Montrer que, pour tout $u \in [0; 1]$

$$0 \leq 1 - u \leq e^{-u}.$$

- (6) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, et préciser, à l'aide du rappel au début de cet exercice et d'un changement de variable affine, sa valeur C .

- (7) En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n} \cdot t$ que

$$0 \leq I_n \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

- (8) Que peut-on conclure quant à la limite de (I_n) ?

- (9) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$$

puis que

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(10) En déduire, par récurrence, que

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

(11) Compléter alors la fonction ci-dessous pour qu'elle permette de calculer et de renvoyer la valeur de I_n .

```
import numpy as np

def I(n) :
    i=1
    for k in ..... :
        i = .....
    return i
```

(12) En écrivant

$$I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!},$$

et à l'aide de l'équivalent obtenu à la question (3), montrer qu'il existe une constante α (qui dépend de κ) telle que

$$I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}.$$

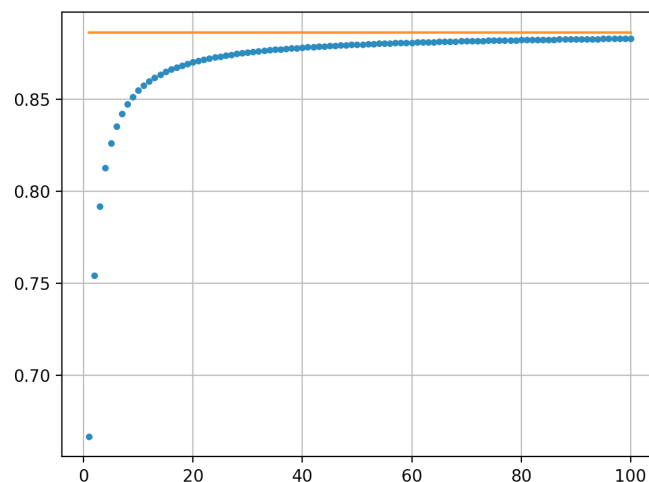
(13) Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?

(14) On rajoute les instructions Python à la suite de la fonction écrite précédemment, et on obtient la figure ci-contre. Émettre une conjecture quant à la valeur de α puis pour celle de κ .

```
import matplotlib.pyplot as plt

N=[k for k in range(1, 101)]
eq=[I(k)*np.sqrt(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N, eq, '.')
M=[np.sqrt(np.pi)/2 for k in N]
plt.plot(N, M)
plt.show()
```

Affichage Python



Partie C : Détermination des constantes κ et α

On introduit maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la suite

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

(15) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n est bien définie et préciser la valeur de J_0 .

(16) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_{n+1} = (n+1)J_n.$$

(17) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

(18) Montrer soigneusement, à l'aide du changement de variable $x = n + y\sqrt{n}$, que

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy.$$

(19) On note $g_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(y).$$

(b) En **admettant** que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(y) dy,$$

déterminer la valeur de κ . En déduire celle de α .