Chapitre 8. Réduction des matrices carrées

Introduction

Dans différents exercices d'algèbre linéaire, on a déjà pu observer qu'un endomorphisme pouvait être représenté, dans des bases différentes, par des matrices différentes et dans certains cas des matrices plus "simples" ou plus "pratiques" pour le calcul, notamment par des matrices diagonales.

En effet, si A et D représentent un même endomorphisme f (défini sur un espace E de dimension n) dans deux bases différentes, notées respectivement $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors les matrices A et D sont semblables, le lien entre les deux matrices fait intervenir la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$

$$A = PDP^{-1}$$

ce qui implique[1] alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et même $k \in \mathbb{Z}$ si f est un automorphisme ou de manière équivalence si A est inversible)

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

et si D est diagonale, ses puissances se calculent très facilement

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

L'objectif de ce chapitre est, partant d'une matrice carrée A de taille n, de trouver, **si possible**, une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (et donc une matrice de passage P) de sorte que $P^{-1}AP$ soit une **matrice diagonale**.

On peut procéder par analyse du problème; si $\mathcal{B}_2 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n\}$ est la base dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale D ci-dessus, alors, par définition de ce qu'est la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a , pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$f(\epsilon_i) = \lambda_i \epsilon_i.$$

Ainsi, un vecteur d'une base dans laquelle l'endomorphisme est représenté par une matrice diagonale est nécessairement envoyé sur un multiple de lui-même.

Adoptant un point de vue matriciel, il revient donc à chercher des valeurs λ réelles et des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls de sorte que

$$AX = \lambda X.$$

☞ Autrement dit, pour quelles valeurs de λ a-t-on

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}?$$

[1] par une récurrence qu'il faut savoir faire

1 Éléménents propres d'une matrice.

1.1 Généralités

Dans toute la suite, A désigne une matrice (carrée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $I = I_n$ désigne la matrice identité.

Définition

Éléments propres d'une matrice carrée.

- Un réel λ est appelé **valeur propre** de A s'il existe un vecteur (colonne) non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$.
- Le vecteur (colonne) X est appelée **vecteur propre** de A associée à la valeur propre λ.
- L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le **spectre** de A et se note $\mathrm{Sp}(A)$.
- Si λ est une valeur propre de A, le sous-espace $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ est appelé **sous-espace propre de A associé à λ**.

Propriété

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) λ est valeur propre de A;
(ii) Il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = \lambda X$;
(iii) $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$;
(iv) La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

À retenir!

En particulier, le fait que A soit inversible est équivalent au fait que 0 **ne soit pas** valeur propre.

☞ Pour trouver les valeurs propres, il s'agit donc de résoudre un système à paramètre $AX = \lambda X$, ou de faire un pivot de Gauss sur la matrice $A - \lambda I$ jusqu'à l'obtention d'une matrice triangulaire.

En effet, les opération sur les lignes préservent l'inversibilité et on dispose d'une caractérisation de l'inversibilité pour les matrices triangulaires.

avec Python

On peut trouver les éléments propres (valeurs propres et matrice de passage vers une base de vecteurs propres) avec la commande `eig( )` de la bibliothèque `numpy.linalg`. Le premier argument renvoyé est la liste des valeurs propres (réelles ou... complexes).

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as LA

A=[[1, 0, -1], [1,2,1], [2, 2,3]]
print(LA.eig(A))
```

Affichage Python

```
>>>
(array([2., 3., 1.]), array([[-6.66666667e-01, -4.08248290e-01, 7.07106781e-01], [
3.33333333e-01, 4.08248290e-01, -7.07106781e-01], [ 6.66666667e-01, 8.16496581e-01,
5.19864223e-16]]))
```

En particulier, on conclut que, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$.

Vérifions cela par le calcul.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } A \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \\ 1-\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2(\lambda-1) & 1-\lambda \\ 0 & (\lambda-1)(2-\lambda) & \lambda-2 \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2(\lambda-1) & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(3-\lambda) \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3
\end{aligned}$$

Donc, on a bien,

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2,\ 3\}.$$

Exercice 1. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété

Spectre d'une matrice triangulaire.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Propriété

Matrices semblables et éléments propres.

Considérons A et B deux matrices semblables. Alors

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B).$$

En revanche, un vecteur propre de A n'est *a priori* pas un vecteur propre de B.

Preuve. Comme A et B sont semblables, il existe une matrice P inversible telle que $A = P^{-1}BP$ ou encore $B = PAP^{-1}$. Il suit que

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } A \quad & \Longleftrightarrow \quad A - \lambda I \text{ non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad P\,(A-\lambda I)\,P^{-1} \text{ non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad PAP^{-1} - \lambda I \text{ non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad B - \lambda I \text{ non inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ valeur propre de } B
\end{aligned}$$

□

1.2 Le cas particulier des matrices 2×2

Pour les matrices 2×2, on dispose, grâce au déterminant, d'une caractérisation de l'inversibilité. Ceci permet de trouver rapidement une équation dont les valeurs propres seront les solutions. Sans passer par le système à paramètre.

À connaître sur le bout des doigts

Spectre d'une matrice 2×2.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } M &\iff M - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \det(M - \lambda I) = 0 \\ &\iff \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3 Concaténation de vecteurs propres

Propriété

Principe de concaténation.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres `distinctes` forme une famille libre.

Ceci signifie que, si $\mathcal{F}_i$ est une famille libre de $E_{\lambda_i}(A)$, alors la famille $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$ est une famille libre.

En particulier, si on forme une famille de vecteurs en prenant un vecteur propre par valeur propre, la famille obtenue est libre. Ceci a notamment pour conséquence le résultat suivant

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\operatorname{card}(\operatorname{Sp}(A)) \leq n.$$

Une matrice de taille n admet au plus n valeurs propres distinctes.

Exercice 3. Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les vecteurs colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer AX_1, AX_2 et AX_3. En déduire $\operatorname{Sp}(A)$.

2 Polynômes et valeurs propres

Propriété

Polynomes et valeurs propres.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme. Alors,

(i) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X vecteur propre associé à λ, alors $P(A)X = P(\lambda)X$.
(ii) Toute valeur propre de A est racine de **tout** polynôme annulateur de A.
(iii) Si P est un polynôme annulateur de A alors

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{x \in \mathbb{R} : \; P(x) = 0\}.$$

À connaître sur le bout des doigts

La dernière propriété est **cruciale.** Elle signifie que, si l'on dispose d'un polynôme annulateur (souvent donné dans les énoncés d'exercices), les valeurs propres sont à chercher parmi l'ensemble des racines du polynôme.

On évite grâce à cela la résolution du système à paramètre !

Attention. En revanche, un polynôme annulateur (de A) pourrait avoir une racine qui **n'est pas** valeur propre de A.

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer A^2.
(2) En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

Exercice 5. (D'après **ECRICOME 2017**). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $(A - I)^2$ puis $(A - I)^3$. En déduire un polynôme annulateur de A.
(2) Déterminer le spectre de A.

3 Matrices diagonalisables

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit, s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

À connaître sur le bout des doigts

☞ **Diagonaliser** une matrice A, c'est trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Pour cela, on prendra pour P une matrice dont les colonnes seront, si c'est possible, des vecteurs propres de A formant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Vérifier que $A^3 = A$.
(2) Diagonaliser A.

Exercice 7. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que 10 est valeur propre de M.
(2) Diagonaliser M.

Exercice 8. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure M dont tous les éléments diagonaux sont tous égaux (à λ) est diagonalisable si et seulement si $M = \lambda I$.

4 Matrices symétriques

On rappelle qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée: ${}^tA = A$.
Dans le cas des matrices symétriques, on peut conclure en citant le résultat ci-dessous et sans autre forme de procès.

Propriété

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

5 Application(s)

Une des applications principale de la diagonalisation est le calcul des puissances d'une matrice qu'on peut être notamment amené à vouloir calculer dans le cadre de suites récurrentes croisées.

Exercice 9. (Inspiré de **EML 1993**) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer les valeurs propres de A. (On les notera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.) A est-elle inversible ?
(2) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.
(3) Expliciter une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

(4) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, explicitement la matrice A^n.
(5) **Application**. On considère les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par la donnée de leurs premiers termes u_0, v_0, w_0 et par les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n - w_n \\ v_{n+1} & = & v_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + 2v_n + w_n \end{cases}$$

Exprimer le terme général, en fonction de n de chacune des trois suites.

6 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 801. Déterminer le spectre de chacune des trois matrices suivantes ainsi que les sous-espaces propres associés. Les matrices sont-elles diagonalisables? Préciser, le cas échéant, la matrice de passage vers une base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \quad (\delta \in \mathbb{R}).$$

Exercice 802. On considère la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer U^2 et l'exprimer en fonction de U et I_4.
(2) En déduire le spectre de U et une base de chaque sous-espace propre.

Exercice 803. (D'après **ECRICOME 2010**) Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour tout réel a, on considère la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a.$$

(1) **Recherche des valeurs propres de f_a.**

(a) Montrer que
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(M_a) \Longleftrightarrow Q(\lambda) = 0.$$
(b) Vérifier que le réel $\lambda = 1$ est racine de Q.
(c) En déduire les racines de Q ainsi que leur nombre en fonction de a.
(d) Lorsque $a = 1$, la matrice M_1 est-il diagonalisable ?

(2) **Réduction de la matrice M_a.**

On suppose $a \neq 1$. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs définie par

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

(a) Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note P_a la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
(b) Montrer que e'_1 est un vecteur propre de M_a.
(c) Expliciter la matrice $T_a = P_a^{-1} M_a P$.
(d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$T_a^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) **Étude d'une suite récurrente linéaire.**

Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par ses premiers termes $u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0$ et par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

(a) Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

(b) Établir par récurrence que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$.

(c) Donner l'expression P_2^{-1} puis exprimer u_n en fonction de n.

(d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 804. (D'après **EML 2007**) On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.

(2) Calculer $4A^3 - 3A$. En déduire un polynôme P annulateur de A.

(3) Calculer $P(1)$. En déduire une racine de P puis, par division euclidienne de P par $X - 1$ les autres racines de P.

(4) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = P\ D\ P^{-1}$. Calculer P^{-1}.

(5) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.

(6) Soient $u_0,\ v_0,\ w_0$ trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. On note

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = A\ X_{n-1}$.

(a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}.$$

(c) Déterminer les limites respectives $u,\ v,\ w$ de $u_n,\ v_n,\ w_n$ lorsque le nombre entier n tend vers l'infini.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}.$$

(d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(e) Déterminer un entier naturel n tel que : $d_n \leq 10^{-2}$.

Exercice 805. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Étant données deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$, le but de l'exercice est de comparer le spectre des matrices AB et BA et d'étudier leur *diagonalisabilité.*

(1) **Un exemple**. On considère les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (i) Les matrices A et B sont-elles inversibles ?
(ii) Calculer AB et BA.
(iii) Justifier sans aucun calcul que les matrices AB et BA sont diagonalisables.
(iv) Déterminer le spectre de la matrice BA à l'aide du pivot de gauss.
(v) Vérifier que les matrices AB et BA ont même spectre.

(b) (i) Les matrices C et D sont-elles inversibles ?
(ii) Calculer CD et DC.
(iii) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 - X^2$ est un polynôme annulateur de DC.
(iv) En déduire le spectre de la matrice DC.
(v) Vérifier que les matrices CD et DC ont même spectre.
(vi) Les matrices CD et DC sont-elles diagonalisables ?

(2) **Cas général**. On considère deux matrices A et B **inversibles** de $M_n(\mathbb{R})$.

(a) Soit λ une valeur propre de la matrice AB et X un vecteur propre associé.
(i) Montrer que la matrice AB est inversible puis en déduire, en le justifiant, que $\lambda \neq 0$.
(ii) Montrer que le vecteur BX est non nul.
(iii) Montrer que le vecteur BX est un vecteur propre de la matrice BA associé à la valeur propre λ.

(b) En déduire que $\text{Sp}(AB) \subset \text{Sp}(BA)$ puis conclure, sans aucun calcul supplémentaire, que les matrices AB et BA ont même spectre.
(c) *On rappelle que les matrices A et B sont inversibles.*
On va montrer dans cette question que si AB est diagonalisable alors BA est diagonalisable. On suppose donc que AB est diagonalisable et on note $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de AB.
(i) Montrer que la famille $(BX_1, BX_2, \ldots, BX_n)$ est libre.
(ii) En déduire, en utilisant la question 2(a)iii) de cette partie, que BA est diagonalisable.

(d) Justifier, sans aucun calcul supplémentaire, que si BA est diagonalisable alors AB est diagonalisable.
(e) On a montré dans cette partie, que lorsque les matrices A et B sont inversibles, alors $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$ et de plus, AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable. Ce résultat est-il toujours valable lorsque les matrices A et B ne sont pas inversibles ?

Exercice 806. Soient $m > 0$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Exprimer M^2 en fonction de M et I_3.
(2) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

Exercice 807. (Extrait de **ESSEC II 2016**) Soit $p \in]0;1[$. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 808. On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante
- Si on tire la lettre a, on change le jeton A de case;
- Si on tire la lettre b, on change le jeton B de case;
- Si on tire la lettre c, les positions des deux jetons restent inchangées.

On introduit les variables X_n (respectivement Y_n) qui valent 0 si à l'issue de la $n-$ième expérience, le jeton A (resp. le jeton B) est dans la case C_0 et 1 si il est dans la case C_1.
Naturellement, $X_0 = Y_0 = 0$.

(1) On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
  (a) Justifier que M est diagonalisable.
  (b) Déterminer les valeurs propres de M et une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
  (c) En déduire l'expression de M^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) (a) Déterminer la loi de X_1.
  (b) À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, déterminer ensuite une matrice Q telle que
$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$
  (c) Expliciter Q^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
  (d) En déduire la loi de X_n.

Exercice 809. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} V(X) & \mathrm{cov}(X, Y) \\ \mathrm{cov}(Y, X) & V(Y) \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que A est diagonalisable.
(2) Montrer que les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

Exercice 810. Soit $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) Diagonaliser B.
(2) Déterminer une matrice A telle que $A^3 = B$.

Exercice 811. On considère $H = \mathrm{Vect}(A_1, ..., A_{n^2-1})$ un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n-1$. Le but est de montrer que H contient au moins une matrice inversible.
☞ *On suppose donc que H ne contient aucune matrice inversible.*

(1) Montrer que $(A_1, ..., A_{n^2-1}, I)$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Soit N une matrice nilpotente, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$.
  (a) Montrer que 0 est la seule valeur propre de N.
  (b) Montrer qu'il existe une matrice $B \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $N = B + \lambda I$ puis que $\lambda = 0$.
  (c) En déduire que H contient toutes les matrices nilpotentes.

(3) Déterminer une matrice inversible qui s'écrive comme somme de deux matrices nilpotentes. Conclure.