Concours Blanc n°2 - Math II

Solution

Partie 1 : Contexte et préliminaires

Un joueur joue à *Pile* ou *Face* avec une pièce équilibrée : pile lui rapporte 1 euro, face lui coûte 1 euro.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n la variable aléatoire égale à son gain total (éventuellement négatif) après n lancers de la pièce.

(1) À chaque fois qu'on a *Pile*, la variable qui contient la valeur du gain augmente de 1. À chaque *Face*, elle diminue de 1. La pièce est équilibrée donc le test pour décider si on a *Pile* ou *Face* est `if rd.random() <=1/2 :`. On a donc le programme suivant

```
def simul_S(n):
    G=0
    for k in range(n): # on lance n fois
        if rd.random( ) <= 1/2 : # si PILE
            G=G+1
        else :
            G=G-1
    return G
```

(2) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, T_n la variable aléatoire correspondant au nombre de *Pile* obtenus lors des n lancers de la pièce.

(a) La variable aléatoire T_n compte le nombre de succès (obtenir *Pile*) lors de n répétitions identiques et indépendantes de la même épreuve de Bernoulli (lancer une pièce). On a reconnu une loi binomiale de paramètres n et $1/2$. D'après le cours

$$E(T_n) = \frac{n}{2}, \qquad V(T_n) = \frac{n}{4}.$$

(b) Si on a T_n *Pile* lors des n lancers, on a aussi $n - T_n$ *Face*. On gagne un euro par *Pile* et on perd un euro par *Face*. On a alors

$$S_n = T_n - (n - T - n) = 2T_n - n.$$

Par linéarité de l'espérance, on peut alors déduire que

$$E(S_n) = 2E(T_n) - n = 2 \times \frac{n}{2} - n = 0.$$

Le joueur est intéressé à estimer sa probabilité de gagner en n coups plus de K euros, ou au moins d'obtenir une minoration de $P(S_n \geq K)$.

(3) Commençons par observer que $S_n(\Omega) = [-n; n]$ (en effet, si on a n *Face*, on perd n euros et $S_n = -n$ si on a n *Pile*, $S_n = n$ et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles).
Soit $K \in [\![-n, n]\!]$. Comme $[S_n \geq K] = [2T_n - n \geq K] = [T_n \geq (n+K)/2]$. Par incompatibilité, on a

$$P(S_n \geq K) = \sum_{j=\lfloor \frac{K+n}{2} \rfloor}^{n} P(T_n = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=\lfloor \frac{K+n}{2} \rfloor}^{n} \binom{n}{j}.$$

L'objet de toute la suite du problème est d'obtenir une telle minoration sous la forme d'une inégalité dite *de grandes déviations.*

Partie 2 : Obtention de quelques résultats du cours de deuxième année

(4) Soient X et Y deux variables aléatoires finies telles que $X(\Omega) = \{x_1, ...x_\ell\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_m\}$.

(a) Les variables aléatoires X et Y sont finies. Il en est de même pour la variable aléatoire XY. En effet

$$XY(\Omega) = \{x_i y_j : 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m\}$$

et $\text{card}(XY(\Omega)) \leq \ell m$. Ainsi, XY admet bien une espérance.
On **admet** alors que

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j P([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

(b) On cherche à écrire une fonction Python permettant le calcul de $E(XY)$. On suppose que les valeurs prises par X et Y sont stockées respectivement dans des variables `X` et `Y` et que la *loi conjointe* de X et Y est stockée dans une matrice `M` (c'est à dire que si $M = (M_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq j \leq m}}$, on a $M_{i,j} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$).

Il faut faire un calcul de somme double avec la formule ci-dessous. Le programme à compléter est assez clair.

```
def esp_prod(X,Y,M) :
    l=len(X)
    m=len(Y)
    s=0
    for i in range(l) :
        for j in range(m) :
            s = s+X[i]*Y[j]*M[i,j]
    return s
```

(c) On rappelle qu'on dit que X et Y sont indépendantes si, pour tous $(i, j) \in [\![1, \ell]\!] \times [\![1, m]\!]$, on a $P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$.

Il suffit de calculer, en utilisant la propriété d'indépendance, la somme double ci-dessus :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P([X=x_i]\cap[Y=y_j]) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(X=x_i)P(Y=y_j) \qquad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} x_i P(X=x_i) \sum_{j=1}^{m} y_j P(X=x_i)P(Y=y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} x_i P(X=x_i) E(Y) \\
&= E(X)E(Y),
\end{aligned}$$

comme attendu.

(d) On va donc demander à l'ordinateur de vérifier que $E(X)E(Y)=E(XY)$. Si ce n'est pas le cas, on sait que X et Y ne sont pas indépendantes et on renvoie 0. Si c'est égal, on ne peut pas conclure. (Rien ne dit que la réciproque de la formule montrée ci-dessus est vraie, et d'ailleurs elle ne l'est pas comme on le verra dans le cours de l'année prochaine). Par contre il faut pouvoir calculer les espérances de X et de Y et donc récupérer les lois de X et Y... La formule des probabilités totales appliquées respectivement aux s.c.e $\{[Y=y_j] : 1 \leq j \leq m\}$ et $\{[X=x_i] : 1 \leq i \leq \ell\}$ permet d'obtenir :

$$\forall i \in [\![1,\ell]\!], \qquad P(X=x_i) = \sum_{j=1}^{m} P([X=x_i]\cap[Y=y_j])$$

et

$$\forall j \in [\![1,m]\!], \qquad P(Y=y_i) = \sum_{i=1}^{\ell} P([X=x_i]\cap[Y=y_j])$$

Il suffit donc de sommer les colonnes de M pour avoir les valeurs de la loi de X et les lignes de M pour avoir les valeurs de la loi de Y.

```
def test_nec(X,Y,M) :
    l=len(X)
    m=len(Y)
    EXY=esp_prod(X,Y,M)
    loiX=[np.sum([M[i,j] for j in range(m)]) for i in range(l)]
    loiY=[np.sum([M[i,j] for i in range(l)]) for j in range(m)]
    EX=np.sum([X[i]*loiX[i] for i in range(l)])
    EY=np.sum([Y[j]*loiY[j] for j in range(m)])
    if EXY-EX*EY !=0 :
        return 0
    else :
        return -1
```

(5) Soit Y une variable aléatoire finie à valeurs positives d'univers image $Y(\Omega)=\{y_1,...y_\ell\}\subset\mathbb{R}_+$ avec $0\leq y_1<y_2<...<y_\ell$. Soit $t>0$. Il s'agit de découper en deux sous-ensembles les valeurs de $Y(\Omega)$: celles qui sont strictement inférieures à t et celles qui sont supérieures ou égales à t. Ensuite, pour tout i tel que $y_i \geq t$, on a bien évidemment $y_i \geq t$, ce qui donne (car t ne dépend

pas de l'indice de sommation)

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i:\, y_i<t} y_i P(Y=y_i) + \sum_{i:\, y_i\geq t} y_i P(Y=y_i) \\ &\geq \sum_{i:\, y_i\geq t} y_i P(Y=y_i) \qquad \text{car, pour tout } i,\ y_i \geq 0 \\ &\geq \sum_{i:\, y_i\geq t} tP(Y=y_i) = t\sum_{i:\, y_i\geq t} P(Y=y_i) \\ &\geq tP(Y\geq t). \end{aligned}$$

On a bien

$$P(Y\geq t) \leq \frac{E(Y)}{t}.$$

Cette inégalité est un résultat du cours de deuxième année connu sous le nom d'*Inégalité de Markov.*

Dans toute la suite du problème, on **admet** le résultat suivant (connu sous le nom de *Lemme des coalitions*) :

Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute variable aléatoire obtenue comme fonction de X_{n+1} est indépendante de toute variable aléatoire obtenue comme fonction des variables $X_0, X_1, ..., X_n$.

Partie 3 : Fonction génératrice des moments

(6) On considère une variable aléatoire finie X.
Comme $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ est un ensemble fini, alors $X^k(\Omega) = \{x_1^k, ..., x_n^k\}$ est encore un ensemble fini, ainsi X^k admet une espérance. De plus, le théorème de transfert permet d'affirmer que

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P(X=x_i).$$

(7) On note maintenant $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_\ell\}$ et, pour $i \in [\![1, \ell]\!]$, $p_i = P(X=x_i)$.

(a)

(i) Par le théorème de transfert,

$$M_X(t) \;=\; E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^{\ell} e^{tx_i} p_i$$

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in [\![1;\ell]\!]$, on a bien $e^{tx_i} > 0$ et $p_i > 0$. Par produit, puis par somme (finie), on a alors $M_X(t) > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) (i) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- intialisation. Pour $n = 0$, par définition

$$M_X^{(0)}(t) = M_X(t) = E(e^{tX}) = E(X^0 e^{tX}),$$

et la formule est vraie.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $M_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})$ (HR). Alors,

$$\begin{aligned} M_X^{(k+1)}(t) &= \left(M_X^{(k)}\right)'(t) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i^k e^{tx_i} p_i\right)' \qquad \text{(par HR et théorème de transfert)} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} x_i^{k+1} e^{tx_i} p_i \\ &= E(X^{k+1} e^{tX}) \qquad \text{(par théorème de transfert)} \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

(ii) D'après la question précédente

$$\begin{aligned} M_X^{(k)}(0) &= \sum_{i=1}^{\ell} x_i^k p_i e^0 = \sum_{i=1}^{\ell} x_i^k p_i \\ &= E(X^k) \qquad \text{(toujours par théorème de transfert)} \end{aligned}$$

(iii) Par la formule de König-Huygens et la question précédente,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = M_X''(0) - M_X'(0)^2.$$

(c) Par ce qui précède (même si on a jamais justifié que M_X était de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, il apparait clair qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme combinaison linéaire d'exponentielles, elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$), on a

$$M_X''(t) = E(X^2 e^{tX}) = \sum_{i=1}^{\ell} x_i^2 e^{tx_i} p_i$$

Avec le même argument que précédemment (somme de termes strictement positifs) la somme ci-dessus est strictement positive (et ce, pour tout $t \in \mathbb{R}$). Donc M_X est convexe sur $\mathbb{R}$.

(8) On note $S_n = X_1 + ... + X_n$, où les X_i sont (mutuellement) indépendantes.

$$M_{S_n}(t) = E(e^{tS_n}) = E\left(e^{t(X_1+...+X_n)}\right) = E\left(e^{tX_1} e^{tX_2} ... e^{tX_n}\right)$$

Par le lemme des coalitions, les variables $e^{tX_1}, e^{tX_2}, ..., e^{tX_n}$ sont aussi mutuellement indépendantes. Il faut alors commencer par étendre le résultat de la Question (4c) par récurrence. Montrons que, si $Y_1, ..., Y_n$ mutuellement indépendantes (et finies) alors

$$E(Y_1 Y_2 ... Y_n) = E(Y_1) E(Y_2) ... E(Y_n)$$

Il n'y a pas besoin d'initialiser cette récurrence. Supposons que le résultat soit vrai pour un certain n. On considère alors $Y_1, ..., Y_{n+1}$ mutuellement indépendantes. Observons que $Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ est encore une variable aléatoire finie (elle prend un nombre fini de valeurs) qui est, par le lemme des coalitions, indépendante de Y_{n+1}. Alors, par $(1b)$, on a

$$E(Y_1 Y_2 ... Y_{n+1}) = E(Y_1 Y_2 ... Y_n) E(Y_{n+1})$$

Mais on peut maintenant appliquer l'hypothèse de récurrence pour écrire

$$E(Y_1 Y_2 ... Y_{n+1}) = E(Y_1) E(Y_2) ... E(Y_n) E(Y_{n+1})$$

et la récurrence est terminée. En appliquant le résultat avec $Y_i = e^{tX_i}$, on a la formule demandée

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).$$

(9) On suppose ici que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, où $p \in]0;1[$.

(a) Comme $X(\Omega) = \{0;1\}$, on a

$$M_X(t) = \sum_{i=0}^{1} e^{ti} P(X = i) = (1-p) + pe^t.$$

(b) On dérive. $M_X'(0) = pe^0 = p = E(X)$. On a aussi $M_X''(0) = p$.

(c) On retrouve bien

$$V(X) = p(1-p) = p - p^2 = M_X''(0) - M_X'(0)^2.$$

(10) Soit Y une v.a finie avec $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_\ell\}$, $p_i = P(Y = y_i) > 0$ vérifiant $E(Y) < 0$ et $P(Y > 0) > 0$.

(a) D'après ce qui précède, $M_Y'(0) = E(Y) < 0$ par hypothèse. Il n'y a donc rien à faire de plus.

(b) On sait que $M_Y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i e^{ty_i}$.

Il y a dans cette somme des indices pour lesquels $y_i \leq 0$ mais aussi des indices (et au moins un, sinon $P(Y > 0)$ ne serait pas strictement positive) pour lesquels $y_i > 0$. En prenant le plus grand, c'est à dire

$$\gamma = \max\{y_i \in Y(\Omega) : \ y_i > 0\}$$

et en notant m tel que $y_m = \gamma$, on a, par factorisation

$$M_Y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i e^{ty_i} \sim y_m e^{y_m t} \longrightarrow +\infty, \qquad t \to +\infty.$$

(c) Cette question vise à montrer que la fonction M_Y admet un minimum sur $]0;+\infty[$ et est un peu subtile.

On peut raisonner avec les informations à dispositions : $M_Y''(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc M_Y' est strictement croissante. Si, pour tout $t > 0$, on avait $M_Y'(t) \leq 0$, alors M_Y serait décroissante sur $]0;+\infty[$, ce qui est incompatible avec la limite infinie montrée à la question précédente. Donc il existe $t_1 > 0$ tel que $M_Y'(t_1) > 0$. Par stricte croissante de M_Y', on a donc $M_Y'(t) > 0$ pour tout $t \geq t_1$. En appliquant le théorème de bijection à M_Y' celle-ci réalise une bijection de $]0,\infty[$ sur un ensemble J qui contient $]M_Y'(0); M_Y'(t_1)[$ qui lui même contient 0 qui admet donc un unique antécédent $\tau > 0$ par M_Y' qui est bien la valeur où le minimum de M_Y est atteinte :

t	0		τ		$+\infty$
$M_Y'(t)$		$-$	0	$+$	
M_Y	$E(Y)$	$\searrow$	$M_Y(\tau)$	$\nearrow$	$+\infty$

(11) Soit $a < 0 < b$ et X une variable finie d'espérance nulle telle que $P(<\leq X \leq b) = 1$.

(a) C'est une inégalité de convexité. On sait que, pour toute fonction convexe f sur $[a,b]$ pour tous λ, μ tels que $\lambda + \mu = 1$, on a

$$f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b).$$

Soit $t>0$ fixé. On va donc appliquer ceci avec $f: x \mapsto e^{tx}$ (qui est clairement convexe car de dérivée seconde égale à t^2e^{tx} strictement positive), $\lambda = \dfrac{b-u}{b-a}$ et $\mu = \dfrac{u-a}{b-a}$.
(On a bien

$$\lambda + \mu = \frac{b-u}{b-a} + \frac{u-a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1.)$$

On obtient donc, en observant que

$$\lambda a + \mu b = \frac{b-u}{b-a}a + \frac{u-a}{b-a}b = \frac{ba-ua+ub-ab}{b-a} = u$$

$$\begin{aligned} e^t u &= \exp\left(t\left(\lambda a + \mu b\right)\right) \\ &\leq \lambda e^{ta} + \mu e^{tb} \\ &= \frac{b-u}{b-a}e^{ta} + \frac{u-a}{b-a}e^{tb}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) On applique cette inégalité avec $u = x_i$ qui est bien un élément (pour tout $i \in [\![1;\ell]\!]$) de $[a,b]$ par hypothèse. Ceci donne

$$e^{tx_i} \leq \frac{b-x_i}{b-a}e^{ta} + \frac{x_i-a}{b-a}e^{tb}.$$

En injectant cette inégalité dans la formule obtenue en (2a)-(i), et du fait que

$$\sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{\ell} p_i x_i = E(X) = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{i=1}^{\ell} p_i t^{x_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell} p_i \left(\frac{b-x_i}{b-a}e^{ta} + \frac{x_i-a}{b-a}e^{tb}\right) \\ &= e^{ta}\left(\frac{b}{b-a} - \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{\ell} x_i p_i\right) + e^{tb}\left(\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{\ell} x_i p_i - \frac{a}{b-a}\right) \\ &= \frac{b}{b-a}e^{ta} - \frac{a}{b-a}e^{tb}. \end{aligned}$$

On pose $b = \dfrac{-a}{b-a}$ et on introduit la fonction

$$\psi: \ s \longmapsto \ln\left(1-p+pe^s\right) - ps$$

(c) C'est une simple vérification néanmoins un peu lourde du fait des notation. Observant que $p(b-a) = -a$,

$$\begin{aligned} \exp\left(\psi(t(b-a))\right) &= \frac{1-p+pe^{t(b-a)}}{e^{pt(b-a)}} \\ &= e^{at}\left(1-p+pe^{t(b-a)}\right) = e^{at} + \frac{a}{b-a}e^{at} - \frac{a}{b-a}e^{bt} \\ &= \frac{b}{b-a}e^{at} - \frac{a}{b-a}e^{at} \\ &\geq M_X(t) \qquad \text{(par la question précédente)} \end{aligned}$$

(d)

(i) On vérifie

$$\psi(0) = \ln(1-p+p) = 0,$$

$$\psi'(s) = \frac{pe^s}{1-p+pe^s} - p, \quad \psi'(0) = \frac{p}{1-p+p} - p = 0.$$

(ii) Soient $u, v > 0$. On a

$$4uv - (u+v)^2 = 4uv - u^2 - 2uv - v^2 = -u^2 + 2uv - v^2 = -(u-v)^2 \leq 0$$

ce qui donne bien l'inégalité souhaitée.

(iii) On commence par calculer la dérivée seconde:

$$\psi''(s) = \frac{pe^s(1-p+pe^s) - pe^s pe - s}{(1-p+pe^s)^2} = \frac{pe^s(1-p)}{((1-p)+pe^s)^2}$$

On va alors appliquer l'inégalité de la question précédente avec $u = 1-p > 0$ et $v = pe^s > 0$. Comme l'inégalité se réécrit

$$\frac{uv}{(u+v)^2} \leq \frac{1}{4},$$

on a bien $\psi''(s) \leq 1/4$ comme demandé.

(iv) Posons la fonction $h: \ s \mapsto \psi(s) - \frac{1}{8}s^2$. On a

$$h'(s) = \psi'(s) - \frac{1}{4}s, \qquad h''(s) = \psi''(s) - \frac{1}{4} \leq 0.$$

Ainsi, on a les tableaux *en cascade*

s	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h''(s)$	$-$
h'	$0 \searrow$
$h'(s)$	0 $\quad$ $-$
h	$0 \searrow$
$h(s)$	0 $\quad$ $-$

En particulier, $h(s) \leq 0$ pour tout $s > 0$, ou encore $\psi(s) \leq \dfrac{1}{8}s^2$.

(e) En combinant les Question ($6c$) et ($6d$) $-$ (iv), on a, par croissance de l'exponentielle,

$$M_X(t) \leq \exp\left(\psi(t(b-a))\right) \leq \exp\left(\frac{1}{8}t^2(b-a)^2\right).$$

Partie 4 : Quelques inégalités

On rappelle que la fonction logarithme est concave, ce qui se traduit par la propriété suivante :

Si $p_1, \ldots, p_\ell$ sont des nombres réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1$ et $x_1, \ldots, x_\ell$ sont des réels strictement positifs, on a :

$$\ln\left(p_1 x_1 + \cdots + p_\ell x_\ell\right) \geq p_1 \ln(x_1) + \cdots + p_\ell \ln(x_\ell).$$

(12) On va utiliser l'inégalité de Jensen, avec la fonction ln qui est concave. Notant comme précédemment $X(\Omega) = \{x_i : i \in [\![A, \ell]\!]\}$ et $p_i = P(X = x_i)$ (ce qui donne bien $p_1 + p_2 + ... + p_\ell = 1$), on a

$$\begin{aligned} \ln(E(X)) &= \ln\left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i p_i\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{\ell} p_i \ln(x_i) \qquad \text{(par l'inégalité de concavité)} \\ &= E(\ln(X)) \qquad \text{(par le théorème de transfert),} \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(13) Soient $p, q \geq 1$ deux réels tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(a) Soient a, b deux réels strictement positifs (si a ou b est nul, l'ingalité est triviale). On a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) &\geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \qquad \text{(par concavité de ln)} \\ &= \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab). \end{aligned}$$

En composant par l'exponentielle, croissante, on a bien

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq ab.$$

(b) Soit $\omega \in \Omega$. D'après ce qui précède, comme X, Y sont à valeurs positives, $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont des nombres positives et on a

$$\frac{1}{p}X(\omega)^p + \frac{1}{q}Y(\omega)^q \geq X(\omega)Y(\omega).$$

Ceci étant vrai pour tout $\omega \in \Omega$, par positivité de l'espérance, puis par linéarité de celle-ci, on a

$$\frac{1}{p}E(X^p) + \frac{1}{q}E(Y^q) = E\left(\frac{1}{p}X^p + \frac{1}{q}Y^q\right) \geq E(XY),$$

ce qui est l'inégalité demandée.

(c) Soit $\lambda > 0$. On applique l'inégalité précédente, en remplaçant X par λX également à valeurs positives. On a

$$\lambda E(XY) = E(\lambda XY) \leq \frac{1}{p}E((\lambda X)^p) + \frac{1}{q}E(Y^q) = \frac{\lambda^p}{p}E(X) + \frac{1}{q}E(Y^q)$$

puis en divisant par $\lambda > 0$, on obtient bien

$$E(XY) \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}E(X^p) + \frac{\lambda^{-1}}{q}E(Y^q).$$

Ouf ! Un peu astucieux...

(d) Soient α, β deux réels strictement positifs. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{p}\lambda^{p-1}\alpha + \frac{1}{q}\lambda^{-1}\beta.$$

(i) On commence par dériver

$$\varphi'(\lambda) = \frac{p-1}{p}\lambda^{p-2}\alpha - \frac{1}{q}\lambda^{-2}\beta = \frac{1}{q\lambda^2}\left(\alpha\lambda^p - \beta\right).$$

Notons $\lambda_0 = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/p}$. On peut dresser le tableau de variations :

λ	0		λ_0		$+\infty$
$\varphi'(\lambda)$	$\|$	$-$	0	$+$	
φ	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\varphi(\lambda_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

(ii) Le minimum de φ est donc atteint en λ_0 défini ci-dessus.

(iii) La valeur minimale de φ est donc

$$\varphi(\lambda_0) = \frac{1}{p}\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{(p-1)/p} + \frac{1}{q}\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1/p}.$$

Observons que

$$\frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_0) &= \frac{1}{p}\alpha^{1-1/q}\beta^{1/q} + \frac{1}{q}\alpha^{1/p}\beta^{-1/p+1}\\ &= \left(\alpha^{1/p}\beta^{1/q}\right)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\\ &= \alpha^{1/p}\beta^{1/q}.\end{aligned}$$

(e) L'inégalité obtenue en (8c) étant vraie pour tout $\lambda > 0$, on choisit la valeur de λ qui rend le terme de droite minimal, c'est à dire $\lambda = \lambda_0$ d'après les deux questions précédentes. Avec $\alpha = E(X^p)$ et $\beta = E(Y^q)$ (comme X et Y sont finies et à valeurs strictement positives, les espérances précédentes sont des réels strictement positifs). Il suit que

$$E(XY) \leq \varphi(\lambda_0) = E(X^p)^{1/p}E(Y^q)^{1/q},$$

ce qui est bien l'inégalité de Hölder et répond à la question.

(f) Dans le cas $p = q = 2$, cette inégalité s'écrit comme

$$E(XY) \leq E(X^2)^{1/2}E(Y^2)^{1/2} = \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

elle porte aussi le nom (dans ce cas particulier) d'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(14) On considère une v.a finie X d'espérance nulle, on note $\sigma^2 = E(X^2) > 0$, $\xi^4 = E(X^4) > 0$. On introduit les deux v.a

$$X^+ = \max(X, 0), \qquad X^- = \max(-X, 0)$$

et on pose $\delta = P(X \geq 0)$.

(a) On procède par disjonction de cas. Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $X(\omega) \geq 0$, alors $X^+(\omega) = X(\Omega)$ et comme $-X(\omega) \leq 0$, $X^-(\omega) = 0$ on a dans ce cas $X^+(\omega) - X^-(\omega) = X(\omega)$.
- Si $X(\omega) < 0$, alors $X^+(\omega) = 0$ et comme $-X(\omega) > 0$, $X^-(\omega) = -X(\omega)$ on a dans ce cas $X^+(\omega) - X^-(\omega) = X(\omega)$.

Dans les deux cas la formule est vraie. On a bien

$$X = X^+ - X^-.$$

Par linéarité de l'espérance, on a $E(X^+) - E(X^-) = E(X) = 0$ ou encore $E(X^+) = E(X^-)$.

(b) On raisonne de la même manière. Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $X(\omega) \geq 0$, alors $X^+(\omega) = X(\Omega)$ et comme $-X(\omega) \leq 0$, $X^-(\omega) = 0$ on a dans ce cas $X^+(\omega)^2 + X^-(\omega)^2 = X(\omega)^2$.
- Si $X(\omega) < 0$, alors $X^+(\omega) = 0$ et comme $-X(\omega) > 0$, $X^-(\omega)^2 = (-X(\omega))^2$ on a dans ce cas $X^+(\omega)^2 + X^-(\omega)^2 = X(\omega)^2$.

Dans les deux cas la formule est vraie. On a bien

$$X^2 = (X^+)^2 + (X^-)^2.$$

Toujours par linéarité de l'espérance, on obtient $\sigma^2 = E(X^2) = E((X^+)^2) + E((X^-)^2)$.

(c) Comme on peut écrire

$$X^+ = X + X^-$$

et que X^- est à valeurs positives, on a $X^+ \leq X$ ce qui donne $(X^+)^4 \leq X^4$ et par croissance de l'espérance $E((X^+)^4) \leq E(X^4) = \xi^4$. De la même manière, on obtient $E((X^-)^4) \leq E(X^4) = \xi^4$.

(d) On introduit la v.a W définie par $W(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } X(\omega) \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.

(i) Soit $\omega \in \Omega$.
Si $X(\omega) \geq 0$, alors $W(\omega) = 1$ et $X^+(\omega) = X(\omega)$ donc $W(\omega)X(\omega) = X(\omega) = X^+(\omega)$.
Si $X(\omega) < 0$, alors $W(\omega) = 0$ et $X^+(\omega) = 0$ donc $W(\omega)X(\omega) = 0 = X^+(\omega)$.
Dans les deux cas, on a bien l'égalité demandée, donc $WX = X^+$.

(ii) De la question précédente, on déduit

$$\begin{aligned} E((X^+)^2) &= E(W^2X^2) \\ &\leq \sqrt{E(W^4)E(X^4)} \qquad \text{(par Hölder avec} p = q = 1/2) \\ &= \sqrt{\delta\xi^4} = \sqrt{\delta}\xi^2 \end{aligned}$$

car $W^4 = W$ est une loi de Bernoulli de paramètre (et donc d'espérance) $P(W = 1) = P(X \geq 0) = \delta$.

(e) Malgré l'indication, il faut penser à *bien choisir* les v.a auxquelles on applique l'inégalité de Hölder, plus précisément, il faut découper

$$(X^-)^2 = (X^-)^{2/3}(X^-)^{4/3}$$

Par Hölder, on a alors

$$\begin{aligned} E((X^-)^2) &= E\left((X^-)^{2/3}(X^-)^{4/3}\right) \\ &\leq E\left(\left((X^-)^{2/3}\right)^{3/2}\right)^{2/3} E\left(\left((X^-)^{4/3}\right)^3\right)^{1/3} \\ &= E(X^-)^{2/3}E((X^-)^4)^{1/3}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(f) Toujours avec Hölder

$$\begin{aligned} E(X^-) &= E(X^+) = E(XW) \\ &\leq E(X^4)^{1/4}E(W^{4/3})^{3/4} \\ &= \xi\delta^{3/4}, \end{aligned}$$

ce qu'on nous demandait.

(g) D'après la question précédente, on a également

$$E(X^-)^{2/3} \leq \left(\xi\delta^{3/4}\right)^{2/3} = \xi^{2/3}\sqrt{\delta}.$$

D'après la question ($9c$), on a $E((X^-)^4) \leq \xi^4$ donc $E((X^-)^4)^{1/3} \leq \xi^{4/3}$. En combinant ces deux inégalités et la question ($9e$), on obtient

$$E((X^-)^2) \leq E(X^-)^{2/3}E((X^-)^4)^{1/3} \leq \xi^{2/3}\sqrt{\delta}\xi^{4/3} = \sqrt{\delta}\xi^2.$$

Comme on a également, d'après $(9d) - (ii)$ que $E((X^+)^2) \leq \sqrt{\delta}\xi^2$, on peut conclure, grâce à a question ($9b$) que

$$\sigma^2 = E((X^+)^2) + E((X^-)^2) \leq \sqrt{\delta}\xi^2 + \sqrt{\delta}\xi^2 = 2\sqrt{\delta}\xi^2,$$

ce qui est bien le résultat voulu. Ouf!

(h) En élevant l'inégalité précédente au carré, on obtient

$$\sigma^4 \leq 4\delta\xi^4,$$

ou encore

$$P(X \geq 0) = \delta \geq \frac{\sigma^4}{4\xi^4},$$

ce qui fait quand même bien plaisir.

Partie 5 : Grandes déviations.

On considère une variable aléatoire finie Y d'univers image $\{y_1, ..., y_\ell\}$.
On note $P(Y = y_i) = p_i > 0$.
Comme dans la Question **??**, on suppose que $E(Y) < 0$ et $P(Y > 0) > 0$.
Comme $P(Y > 0) > 0$, il existe des valeurs strictement positives parmi les y_i. Quitte à ré-indexer les y_i, on suppose qu'il existe $k \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$ tel que $y_1, \ldots, y_k$ sont positifs et $y_{k+1}, \ldots, y_\ell$ sont strictement négatifs.
Au vu de la Question **??**, il existe $\tau > 0$ tel que $M_Y(\tau) = \inf_{t\in]0,+\infty[} M_Y(t)$. On pose $\rho = M_Y(\tau)$.

(15)

(a) Il est clair, comme $\tau > 0$, que

$$\begin{aligned}[Y \geq 0] &\iff [\tau Y \geq 0] \\ &\iff [e^{\tau Y} \geq 1]\end{aligned}$$

et donc

$$P(Y \geq 0) = P(e^{\tau Y} \geq 1).$$

(b) La v.a $e^{\tau Y}$ est positive et admet une espérance. Par l'inégalité de Markov, on a

$$P(Y \geq 0) = P(e^{\tau Y} \geq 1) \leq \frac{E(e^{\tau Y})}{1} = M_Y(\tau) = \rho.$$

(16) Par le théorème de transfert

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{e^{\tau y_i}}{\rho} P(Y = y_i) = \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{\ell} e^{\tau y_i} P(Y = y_i) = \frac{1}{\rho}E(e^{\tau Y}) = \frac{1}{\rho}M_Y(\tau) = 1.$$

On considère une v.a Z telle que $Z(\Omega) = \{y_1, ..., y_\ell\}$ et

$$\forall i \in [\![1, \ell]\!], \qquad P(Z = y_i) = \frac{e^{\tau y_i}}{\rho}P(Y = y_i).$$

(Du fait de la question précédente, la formule ci-dessus définit bien une v.a.)

(17)

(a) Par la question $(2a)$,

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \sum_{i=1}^{\ell} P(Z=y_i)e^{ty_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} e^{ty_i}\frac{e^{\tau y_i}}{\rho} P(Y=y_i) \\ &= \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{\ell} e^{(t+\tau)y_i} P(Y=y_i) \\ &= \rho^{-1}M_Y(t+\tau). \end{aligned}$$

(b) Par la question $(2b)-(ii)$, $E(Z)=M'_Z(0)$. Or, d'après la formule ci-dessus

$$M'_Z(t)=\rho^{-1}M'_Y(t+\tau).$$

Mais alors

$$E(Z)=M'_Z(0)=\rho^{-1}M'_Y(\tau)=0$$

car τ est le minimum de M_Y et donc la dérivée s'y annule, comme on l'a vu auparavant.

(c) Toujours d'après la Question $(2b)-(ii)$, on sait que

$$E(Z^2)=M''_Z(0)=\rho^{-1}M''_Y(0\tau)>0,$$

d'après $(2a)-(ii)$.

(18)

(a) On commence par observer que

$$P(Y=y_i)=\rho P(Z=y_i)e^{-\tau y_i}.$$

Ensuite, on somme les probabilités des valeurs positives :

$$\begin{aligned} P(Y\geq 0) &= \sum_{i=1}^{k} P(Y=y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \rho P(Z=y_i)e^{-\tau y_i} \\ &= \rho\sum_{i=1}^{k} P(Z=y_i)e^{-\tau y_i} \end{aligned}$$

On pose $\delta=P(Z\geq 0)$.

(b) Les v.a Y et Z prennent les mêmes valeurs donc

$$Y(\Omega)\cap\mathbb{R}_+=Z(\Omega)\cap\mathbb{R}_+=\{y_1,...,y_k\},$$

il suit donc que

$$\sum_{i=1}^{k}\delta^{-1}P(Z=y_i)=\frac{\sum_{i=1}^{k}P(Z=y_i)}{P(Z\geq 0)}=\frac{P(Z\geq 0)}{P(Z\geq 0)}=1.$$

(c) La somme précédente étant égale à 1, on peut utiliser l'inégalité de concavité.

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{i=1}^{k}\delta^{-1}P(Z=y_i)e^{-\tau y_i}\right) &\geq \sum_{i=1}^{k}\delta^{-1}P(Z=y_i)\ln\left(e^{-\tau y_i}\right)\\ &= -\tau\delta^{-1}\sum_{i=1}^{k}P(Z=y_i)y_i\end{aligned}$$

(d)

(i) Par théorème de transfert

$$\begin{aligned}E(|Z|) &= \sum_{i=1}^{\ell}|y_i|P(Z=y_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k}y_iP(Z=y_i)+\sum_{i=k+1}^{\ell}(-y_i)P(Z=y_i)\\ &\geq \sum_{i=1}^{k}y_iP(Z=y_i)\end{aligned}$$

car, pour tout $i\in [\![k+1,\ell]\!]$, $-y_i\geq 0$.

(ii) Par Hölder pour $p=q=1/2$, on a

$$E(|Z|)=E(|Z|\times 1)\leq\sqrt{E(|Z|^2)E(1^2)}=\sqrt{E(Z^2)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma$$

Par suite, avec la question précédente, on a

$$\sum_{i=1}^{k}y_iP(Z=y_i)\leq E(|Z|)\leq\sigma.$$

(e) D'après ($13c$) et la question précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned}\ln\left(\sum_{i=1}^{k}P(Z=y_i)e^{-\tau y_i}\right) &= \ln\left(\delta\times\sum_{i=1}^{k}\delta^{-1}P(Z=y_i)e^{-\tau y_i}\right)\\ &= \ln(\delta)+\ln\left(\sum_{i=1}^{k}\delta^{-1}P(Z=y_i)e^{-\tau y_i}\right)\\ &\geq \ln(\delta)-\tau\delta^{-1}\sum_{i=1}^{k}P(Z=y_i)y_i\\ &\geq \ln(\delta)-\frac{\tau}{\delta}\sigma,\end{aligned}$$

ce qu'on demandait.

(f) En reprenant l'égalité de la Question ($17a$), et par croissance de la fonction exponentielle combinée avec l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned}P(Y\geq 0) &= \rho\sum_{i=1}^{k}P(Z=y_i)e^{-\tau y_i}\\ &= \rho\exp\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{k}P(Z=y_i)e^{-\tau y_i}\right)\right)\\ &\geq \rho\exp\left(\ln(\delta)-\frac{\tau}{\delta}\sigma\right)=\rho\exp\left(-\left[\frac{\tau\sigma}{\delta}-\ln(\delta)\right]\right)\end{aligned}$$

(g) En appliquant le résultat de la Question ($14h$) à Z (ce qu'on peut faire d'après ($16b$) et ($16c$)), on a

$$\delta \geq \frac{\sigma^4}{4\xi^4}.$$

On injecte alors dans l'inégalité précédente en commençant par écrire que

$$\frac{\tau\sigma}{\delta} - \ln(\delta) \leq \frac{4\tau\xi^4}{\sigma^3} - \ln\left(\frac{\sigma^4}{4\xi^4}\right)$$

puis

$$P(Y \geq 0) \geq \rho \exp\left(-\left[\frac{4\tau\xi^4}{\sigma^3} - \ln\left(\frac{\sigma^4}{4\xi^4}\right)\right]\right)$$

(19) On suppose maintenant qu'on a deux réels $c < 0 < d$ tels que $P(C \leq Y \leq d) = 1$.

(a) On pose $X = Y - E(Y)$.

(i) On a clairement

$$\begin{aligned}[c \leq Y \leq d] &\iff [c - E(Y) \leq Y - E(Y) \leq d - E(Y)] \\ &\iff [a \leq X \leq b]\end{aligned}$$

donc

$$P(a \leq X \leq b) = P(c \leq Y \leq d) = 1.$$

Comme $Y(\Omega) \subset [c, d]$, on sait que $E(Y) \in [c, d]$. Mais comme $E(Y) < 0$ et $d > 0$ alors $E(Y) \in [c, d[$. On doit aussi montrer que $E(Y) > c$. Supposons que $E(Y) = c$. Alors, $Y - c$ est une v.a. positive (ou nulle) d'espérance nulle donc presque sûrement nulle, c'est à dire que $P(Y - c = 0) = 1$ ou encore $P(Y = c) = 1$ ce qui contredit $P(Y > 0) > 0$. Ainsi, $E(Y) \in]c, d[$, ce qui se traduit bien par

$$a = c - E(Y) < 0 < d - E(Y) = b.$$

(ii) D'après ($6e$) qu'on peut appliquer à X car X vérifie (d'après la question précédente) les conditions de ($6a$), on a, pour tout $t > 0$,

$$M_X(t) \leq \exp\left(\frac{1}{8}t^2(b-a)^2\right).$$

Mais, en observant que

$$b - a = d - E(Y) - (c - E(Y)) = d - c,$$

on a en fait, pour tout $t > 0$,

$$M_X(t) \leq \exp\left(\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right).$$

(b) On considère un $n-$échantillon $(Y_1, ..., Y_n)$ de Y et on pose $X_i = Y_i - E(Y)$. Soit $t > 0$. Remarquant que $Y_i = X_i + E(Y)$ et que donc

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} X_i + nE(Y),$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0 &\iff t\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0 \\ &\iff e^{t\sum_{i=1}^{n} Y_i} \geq 0 \geq 1 \\ &\iff e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i} e^{tnE(Y)} \geq 1 \\ &\iff e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i} \geq e^{-tnE(Y)}\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0\right) = P\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i} \geq e^{-tnE(Y)}\right)$$

(c) On applique alors l'inégalité de Markov à $\exp(t(X_1 + ... + X_n))$ qui est positive et admet bien une espérance, ce qui donne

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0\right) &= P\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i} \geq e^{-tnE(Y)}\right) \\ &\leq \frac{E(\exp(t(X_1 + ... + X_n)))}{e^{-tnE(Y)}} \\ &= M_{X_1+...+X_n}(t)e^{tnE(Y)}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(d) D'après la Question (8), on a

$$M_{X_1+...+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

Mais d'après la Question $(18a) - (ii)$, on a

$$M_{X_i}(t) \leq \exp\left(\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right),$$

ce qui donne

$$M_{X_1+...+X_n}(t) \leq \left(\exp\left(\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right)\right)^n = \exp\left(n\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right)$$

pour au final, aboutir à

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0\right) \leq e^{tnE(Y)} \exp\left(n\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right) = \exp\left(tnE(Y) + n\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right)$$

(e) L'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $t > 0$. On va choisir la valeur de t qui rend le majorant de droite minimal. Par croissance de l'exponentielle, il faut choisir la valeur de t qui rend la fonction

$$t \longmapsto nE(Y)t + \frac{1}{8}n(d-c)^2t^2$$

minimale. C'est un polynôme du second degré. On passe sur les étapes, mais le minimum est atteint en

$$t_0 = -\frac{4E(Y)}{(d-c)^2} > 0 \qquad (\text{ car } E(Y) < 0)$$

En évaluant la fonction en t_0, on trouve bien

$$nE(Y)t_0 + \frac{1}{8}n(d-c)^2t_0^2 = -2n\frac{E(Y)^2}{(d-c)^2}$$

ce qui donne bien

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 0\right) \leq \exp\left(-2n\frac{E(Y)^2}{(d-c)^2}\right),$$

et conclut ce très technique mais superbe sujet.