Devoir sur table n° 5

Option économique

MATHÉMATIQUES E1A

Lundi 6 Mars 2023, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur dénoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Dans cet exercice,la matrice identité dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ sera notée I.

Soit la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. SANS AUCUN CALCUL, justifier que T est une matrice inversible.
2. Déterminer explicitement une matrice N telle que $T = 2\,I + N$
3. Calculer N^2 et en déduire N^k, pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = n2^{n-1}\,T - (n-1)2^n\,I$.

Exercice 2

Une urne contient une boule jaune, une verte et une rouge. On effectue n tirages successifs avec remise dans l'urne, et on s'intéresse au nombre de couleurs différentes obtenues à l'issue de ces n tirages.

On note A_n l'événement « Après n tirages, une seule couleur a été tirée », B_n l'événement « Après n tirages, seules deux couleurs distinctes ont été tirées » et C_n l'événement « Après n tirages, les trois couleurs ont été tirées ». On note également a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n.

5. (a) Déterminer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.

   (b) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(C_{n+1})$.

   (c) En déduire l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \mathrm{M}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

On considère dans cette question la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Calculer A^2.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels u_n, v_n et t_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & t_n & 3^n \end{pmatrix}$

   et déterminer par la même occasion les relations de récurrences vérifiées par les suites (u_n), (v_n) et (t_n).

8. En calculant $\sum_{i=1}^{n-1}(u_{i+1} - u_i)$, prouver que $u_n = 2^{n+1} - 2$.

9. En se servant de même de $\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i}\right)$, déterminer la valeur de t_n.

   On admet qu'on pourrait obtenir de façon analogue $v_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

10. (a) En remarquant que $M = \frac{1}{3}A$, donner la valeur de M^{n-1}, puis celles de a_n, b_n et c_n.

    (b) Déterminer les limites de ces trois suites. Les résultats obtenus sont-ils logiques ?

Exercice 3

Soit la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ On appelle I_3, la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Calcul de l'inverse de M.

11. (a) Montrer que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0$.

    (b) En déduire que M est inversible et donner l'expression de M^{-1}.

Calcul des puissances de M.

12. (a) Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $M^n = u_n M + v_n I_3$. On vérifiera que $u_0 = 0,\ v_0 = 1$ et que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = -2u_n + v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 3u_n.$$

    (b) Reconnaître et donner la forme explicite de la suite $(u_n + v_n)$ et en déduire que : pour tout entier n, $u_{n+1} = -3u_n + 1$.

    (c) En déduire l'expression de la suite (u_n) pour tout entier naturel n.

    (d) En déduire l'expression de la matrice M^n en fonction de n.

Une autre manière de déterminer u_n et v_n.

13. (a) Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

    (b) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ Calculer P^2 et en déduire P^{-1}.

    (c) Donner une autre justification de l'inversibilité de la matrice P. Retrouver alors l'expression de P^{-1}.

    (d) Calculer $B = P^{-1} A P$.

    (e) Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PB^nP^{-1}$.

    (f) Calculer B^n pour tout n et en déduire une expression de A^n.

    (g) Retrouver de cette manière les expressions de u_n et de v_n.

Exercice 4

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0\,; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0{,}69 < \ln(2) < 0{,}70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

14. Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

15. Écrire le script *Python* de la fonction f.

16. Justifier que f et f' sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0;+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

17. Montrer que f n'est pas dérivable en 0. Que peut-on en déduire graphiquement ?

18. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

19. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0;+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 (*i.e* deux fois dérivables et à dérivées continues), définie, pour tout (x, y) de $]0;+\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

20. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0;+\infty[^2$.

21. (a) Soit $(x, y) \in]0;+\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1.$$

    (b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

22. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

23. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

24. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. *(On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$.)*

Exercice 5

Dans cet exercice, on donne des extraits de session de calculs ; vous pouvez les utiliser librement afin de "court-circuiter" certains calculs ! Soyez malins !

PARTIE I

25. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

    (a) De l'extrait d'une session de calcul effectuée dans la console, en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} :

```
-->A = [2, 1, -2; 0, 3, 0; 1, -1, 5];
-->A^2-7*A
 ans  =

  - 12.    0.     0.
    0.   - 12.    0.
    0.     0.   - 12.
```

26. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

    (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation matricielle $BX = O_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

    (b) La matrice B est-elle inversible ?

27. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

    (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

    (b) Voici l'extrait d'une session de calcul effectuée dans la console :

```
-->B=[1, -1, -1; -3, 3, -3; -1, 1, 1];
-->P=[1, 1, -1; -1, 1, 0; -1, 0, 1];
-->B*P
 ans  =


    3.    0.  - 2.
  - 3.    0.    0.
  - 3.    0.    2.

-->Q=[1, -1, 1; 1, 0, 1; 1, -1, 2];
-->Q*B*P
 ans  =


    3.    0.    0.
    0.    0.    0.
    0.    0.    2.
```

Expliciter la matrice D telle que $D = P^{-1}\ B\ P$.

(c) La matrice D est-elle inversible ? Donner l'expression de D^n, pour tout entier naturel n.

PARTIE II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $\quad X_{n+2} = \dfrac{1}{6} A X_{n+1} + \dfrac{1}{6} B X_n$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = P^{-1} X_n$.

28. Démontrer que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+2} = \dfrac{1}{6} D_1 Y_{n+1} + \dfrac{1}{6} D_2 Y_n$.

29. Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\ a_{n+1} + \dfrac{1}{2}\ a_n \\[2ex] b_{n+2} & = \dfrac{1}{2}\ b_{n+1} \\[2ex] c_{n+2} & = \dfrac{2}{3}\ c_{n+1} + \dfrac{1}{3}\ c_n \end{cases}$$

30. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices colonnes Y_0 et Y_1.

31. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

32. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{4}{3}$$

33. En déduire les limites des suites (α_n), (β_n) et (γ_n).