Math ECG 1. 2022-2023

Mathématiques Appliquées- F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
E1A - Lycée Carnot, Paris 17e.

Devoir surveillé n°6

Mercredi 5 Avril
Durée : 4 heures

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Partie 1 : Étude de f

(1) Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

(2) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Dresser alors le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera, en justifiant, les limites aux infinis.

(3) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

(4) Représenter l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

(5) (a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
(b) Déterminer l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Partie 2 : Étude d'une suite

On considère dans cette partie la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

(6) Déterminer u_1, u_2, u_3.

(7) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0; 1]$.

(8) Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante. En déduire qu'elles sont toutes les deux convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' qu'on ne précisera pas dans cette question.

(9) (a) Montrer que l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ admet une unique solution dans $]0, 1]$ que l'on précisera.
(b) En déduire que $\ell = \ell'$ puis que (u_n) converge vers ℓ.

(10) (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def u(n) :` qui, prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

(b) Écrire ensuite une fonction d'en-tête `def recherche(eps) :` qui, prenant en argument un réel strictement positif `eps` renvoie le plus petit entier n tel que

$$|u_n - \ell| < \texttt{eps}.$$

Partie 3 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(11) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter $F'(x)$.

(12) Montrer, à l'aide d'un changement de variable affine, que F est impaire.

(13) (a) Soit $x > 1$ fixé. En remarquant que, pour $t \geq 1$, $\sqrt{1+t^2} = t\sqrt{1+1/t^2}$, montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que

$$F(x) \geq \kappa + \frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}$$

(*On commencera par découper en deux l'intégrale définissant* $F(x)$.)

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. Que dire de la limite lorsque $x \to -\infty$?

(14) (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t + \sqrt{t^2+1} > 0$.

(b) En écrivant

$$F(x) = \int_0^x \frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\left(\sqrt{1+t^2}\right)}\mathrm{d}t,$$

et à l'aide du changement de variable $u = t + \sqrt{t^2+1}$, expliciter $F(x)$.

(15) Soit $a > 0$. On note $\mathcal{A}(a)$ l'aire de la surface délimitée par les droites d'équation $x = a$, $x = 2a$, l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$. À l'aide de la question précédente, déterminer

$$\lim_{a\to+\infty} \mathcal{A}(a).$$

Partie 4 : Étude d'une suite d'intégrales

On considère maintenant la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

(15) Justifier que la suite (I_n) est bien définie.

(16) Calculer I_0 et I_1.

(17) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_3.

(18) Déterminer le sens de variations de la suite (I_n).

(19) Montrer que la suite (I_n) est convergente. (*On ne cherchera pas sa limite dans cette question.*)

(20) Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0,1]\,,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(21) Déterminer alors la limite de la suite (I_n).

Exercice 2

On considère trois suites $(un), (v_n)$ et (w_n) définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 1 \\ w_0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n - 2v_n + w_n \end{array}\right.$$

(1) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suites(n) :` qui renvoie le triplet (u_n, v_n, w_n).

On introduit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, c'est à dire que si un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ dans la base canonique, alors $f(u)$ a pour coordonnées AX dans la base canonique.

(2) Déterminer l'expression de $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(3) (a) Calculer $A^2 - 6A$.
Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que A n'est pas inversible.
(b) Déterminer une base (u_1, u_2) de $\mathrm{Ker}(f)$.
(c) Quel est alors le rang de f?

(4) (a) On pose $u_3 = e_1 + 2e_2 - e_3$. Calculer $f(u_3)$ et exprimer le résultat en fonction de u_3.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Expliciter la matrice D de f dans la base $\mathcal{F}$.

(5) On note P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_1, u_2 et u_3 dans la base $\mathcal{B}$ (dans cet ordre). Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} à l'aide d'un pivot de Gauss simultané.

(6) (a) Vérifier par le calcul que $A = PDP^{-1}$.
(b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

(c) Expliciter la matrice A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(7) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Quelle est la valeur de X_0?

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$.
(c) Donner les expressions des termes généraux des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 3

Partie I : Cours en bourse d'une action

On s'intéresse aux **variations** journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On suppose que, chaque jour, le cours de l'action:

- monte d'une unité $(+1)$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$;
- ou bien descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On observe alors l'évolution de l'action pendant $2n$ jours.
On introduit les évènements A_j: "l'action monte d'une unité le $j-$ième jour" (où $1 \leq j \leq 2n$), V_k : "au bout des $2n$ jours, l'action a subi une évolution de $2k$" (avec $k \in [\![-n, n]\!]$ qui peut donc être négatif) et Z_n : "au bout des $2n$ jours, l'évolution du cours de l'action est positive ou nulle".

Par exemple, si $n = 2$, que le cours a baissé le premier jour mais augmenté les trois autres jours, on a une évolution de $-1 + 1 + 1 + 1 = 2$ et donc V_1 ainsi que Z_2 sont réalisés.

Enfin, on note $p_n = P(Z_n)$ et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est à dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

Élément de cours en Python

La commande `rd.random( )` de la bibliothèque `numpy.random` (importée sous l'alias `rd`) renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 selon une certaine loi de probabilité[a]. Plus précisément, si $p \in [0; 1]$, la probabilité que le nombre renvoyé soit inférieure ou égale à p (ou dans un intervalle de longueur p) vaut exactement p.

On **identifie** et décide donc de représenter un évènement de probabilité p par le fait que le nombre aléatoire ainsi renvoyé soit inférieur ou égal à p (ou dans un intervalle de longueur p). Ainsi, pour simuler un évènement de probabilité p, on utilisera la commande `if rd.random() <= p :`

[a]on verra dans le cours de deuxième année qu'il s'agit de la loi uniforme (continue) $\mathcal{U}([0; 1])$

(1) (a) Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui renvoie une simulation de l'évolution après $2n$ jours d'observation.

```
import numpy as np; import numpy.random as rd

def evo(n, p) :
    v=0
    for .................. :
        if ............... :
            .............
        else :
            .............
    return v
```

(b) On admet que la fonction suivante renvoie une *estimation* (ou valeur approchée) de p_n. Décrire son fonctionnement (on précisera notamment ce que contiennent les variables `L` et `c`).

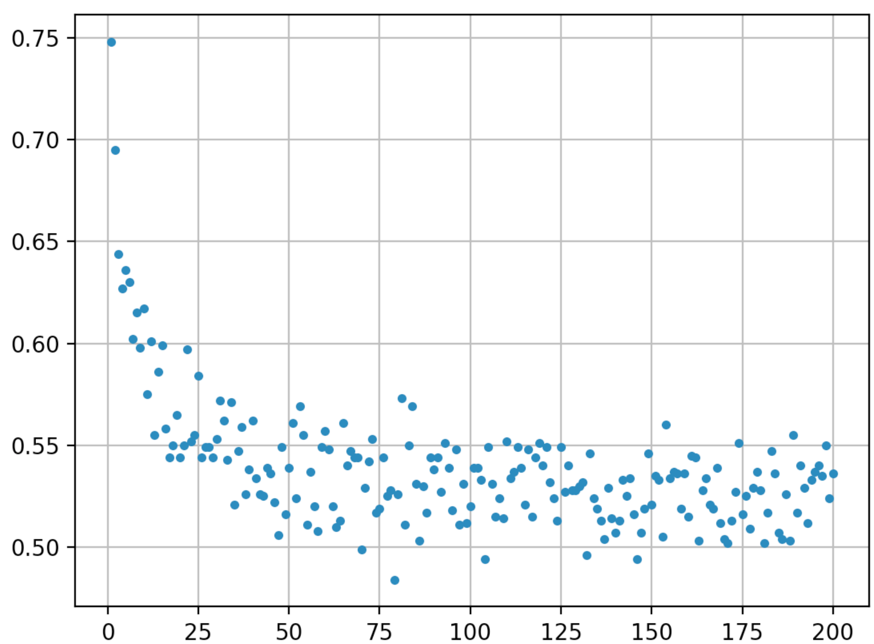
```
def est_p(n, p) :
    L=[ ]
    c=0
    for k in range(1000) :
        L.append(evo(n, p))
    for j in range(1000) :
        if L[j] >=0 :
            c=c+1
    return c/1000
```

(c) Les commandes ci-dessous permettent d'obtenir la figure ci-après. Que représente-t-elle ? Émettre une conjecture.

```
import matplotlib.pyplot as plt

p=1/2
N=[k for k in range(1, 201)]
P=[est_p(k, p) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N, P, '.')
plt.show()
```

Affichage Python



(2) Écrire l'évènement Z_1 à l'aide des évènements A_i et en déduire l'expression de p_1 en fonction de p et de q.

(3) Soit $k \in [\![-n, n]\!]$. On suppose, dans cette question uniquement, que V_k est réalisé. On note alors x_n (respectivement y_n), le nombre de jours où l'action a augmenté (respectivement baissé).

(a) Écrire, en justifiant, un système de deux équations vérifiées par x_n et y_n. En déduire leurs valeurs.

(b) En fixant les $n+k$ jours où l'action augmente (et donc ceux où elle baisse), quelle est la probabilité que cette évolution précise ait lieu?

(c) En déduire que

$$P(V_k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$$

(4) Justifier alors que $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$.

Partie II : Des coefficients binomiaux

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

(5) (a) Calculer $S_1,\ S_2,\ S_3$.

(b) On rappelle qu'en Python, la commande `np.prod(liste)` permet d'obtenir le produit des valeurs de la `liste` prise en argument.

(i) Écrire $\displaystyle\binom{2n}{n+i}$ comme un quotient de produits.

(ii) En déduire une fonction Python d'en tête `def suite_S(n) :` qui renvoie la valeur de S_n.

(c) Justifier que: $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}$.

(d) Montrer que: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} + \binom{2n}{n} = 2S_n$.

En déduire que: $S_n = 2^{2n-1} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\binom{2n}{n}$.

(6) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \displaystyle\binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

(a) Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2} u_p$.

(b) En déduire, par récurrence, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

(c) En déduire alors la limite de u_p lorsque $p \to +\infty$.

(7) On revient aux notations de la Partie 1. On suppose, dans cette question que $p = 1/2$.
À l'aide de la Question (4), exprimer p_n à l'aide de S_n puis montrer que

$$p_n = \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}.$$

Que valent $p_1,\ p_2,\ p_3$?
Vérifier qu'on retrouve la même chose qu'à la Question(2).
Que se passe-t-il quand n devient grand ? Comparer avec la conjecture émise précédemment.