Math ECG 1. 2022-2023

Mathématiques Appliquées- F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
E1A - Lycée Carnot, Paris 17e.

Devoir surveillé n°6

Solution

Exercice 1

Cet exercice est une version étendue d'un exercice du sujet **ECRICOME 2004**.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Partie 1 : Étude de f

(1) f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

et f est bien paire.

(2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction qui ne s'annule pas et qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $1+x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). On a alors

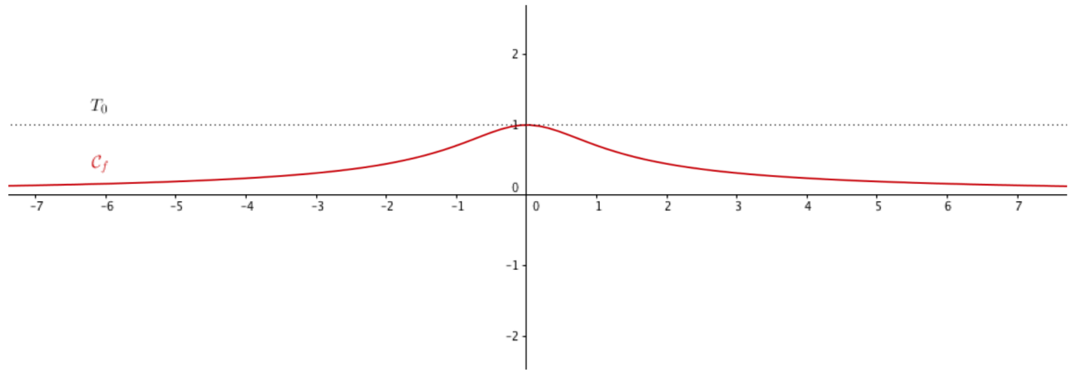
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
En $+\infty$, $\sqrt{1+x^2} \to +\infty$ donc $f(x) \to 0$ lorsque x tend vers $+\infty$ par algèbre des limites. Par parité, on peut alors dresser le tableau de variations complet de f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(3) Il est clair, d'après le tableau de variations ci-dessus, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$ et f est bien bornée sur $\mathbb{R}$.

(4) On a bien sûr i à l'esprit que, par parité, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On fera figurer la tangente en 0 et les asymptotes. On obtient quelque chose ayant l'allure suivante:



(5) (a) Comme f est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, le théorème de bijection assure qu'elle est bijective de $[0,+\infty[$ dans $]\lim_{+\infty} f, f(0)] =]0,1] = J$.

(b) Pour tout y de l'intervalle $]0,1]$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y \\ &\iff \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} \quad \text{car } y \neq 0 \\ &\iff 1+x^2 = \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $\sqrt{1+x^2}$ et $\frac{1}{y^2}$ en sont éléments.

$$f(x) = y \iff x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

et comme $y \in]0,1]$ alors $1-y^2$ est positif, et que $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} \\ &\iff x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \end{aligned}$$

car $x \geq 0$ et $y > 0$ donc f^{-1} est définie (sur $]0,1]$) par

$$f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Partie 2 : Étude d'une suite

On considère dans cette partie la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

(6) On applique la définition en partant de $u_0 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
u_1 &= f(u_0) = f(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 \\
u_2 &= f(u_1) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\
u_3 &= f(u_2) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

(7) Petite récurrence facile, en utilisant les résultat de la Partie 1 (notamment le fait que f est bornées à valeurs dans $]0,1]$).

- initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 \in [0;1]$.

- hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in [0;1]$. Alors, d'après la Partie 1
$$0 \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq 1$$
et on a encore $u_{n+1} \in [0;1]$ ce qui termine cette très courte et très facile récurrence.

(8) Commençons par observer que pour calculer les termes des suites de rangs pairs ou impairs, on va de *deux en deux* donc on applique deux fois f. C'est à dire qu'on applique $f \circ f$.
$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(u_{2n}).$$
Sur $[0;1]$ (où vivent les termes de la suite), la fonction f est décroissante, mais la fonction $f \circ f$ est elle croissante ! Ce qui va permettre de faire une récurrence pour les variations des deux suites et de garantir leur monotonie. Plus précisément
$$(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \times f'(x).$$
Or, on sait que, sur $[0;1], f'(x) \leq 0$ mais comme $f(x) \in]0;1]$, $f'(f(x)) \leq 0$ également et par produit $(f \circ f)'(x) \geq 0$ et donc $f \circ f$ est croissante sur $[0;1]$.

(i) Montrons que (u_{2n}) est croissante (par récurrence).

- initialisation. Pour $n = 0$, on a
$$u_0 = 0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = u_2$$
et la propriété est bien vérifiée.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{2n} \leq u_{2(n+1)}$. Alors, par croissance de $f \circ f$ sur $[0;1]$ dont tous les termes de la suite sont éléments, on a
$$u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n}) \leq (f \circ f)(u_{2(n+1)}) = u_{2(n+2)},$$
ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(ii) On montre de même que (u_{2n+1}) est décroissante.

- initialisation. Pour $n = 0$, on a
$$u_1 = 1 \geq \sqrt{\frac{2}{3}} = u_3$$
et la propriété est bien vérifiée.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{2n+1} \geq u_{2(n+1)+1}$. Alors, par croissance de $f \circ f$ sur $[0;1]$ dont tous les termes de la suite sont éléments, on a
$$u_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(u_{2n+1}) \geq (f \circ f)(u_{2(n+1)}) = u_{2(n+2)+1},$$
ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par 1, elle converge donc vers une certaine limite $\ell \in [0;1]$ par application du théorème de convergence monotone. De même, la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée (par 0), elle converge donc vers une certaine limite $\ell' \in [0;1]$.
Attention, *a priori* rien ne garantit à ce stade que les deux limites sont les mêmes. On va devoir le montrer.

(9) (a) On résout. Soit $x \in]0;1]$.
$$\begin{aligned} f(x) = f^{-1}(x) &\iff \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\iff (1-x^2)(1+x^2) = x^2 \iff x^4 + x^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation bi-carrée qu'on sait donc résoudre. On pose $y = x^2$.
$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 1 = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ y^2 + y - 1 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ y &=& \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array} \right. \qquad (\text{car } y = x^2 \geq 0) \\ &\iff x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \qquad (\text{car } x \geq 0) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ admet pour unique solution dans $]0,1]$ $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

(b) Comme $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$, que $u_{2n} \to \ell$, $u_{2(n+1)} \to \ell$ et que f est continue sur $[0;1]$ (intervalle où se trouve ℓ), le passage à la limite donne
$$\ell = f \circ f(\ell)$$
ou encore, en composant par f^{-1}
$$f^{-1}(\ell) = f(\ell).$$

Ainsi, par la question précédente, on a nécessairement $\ell = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Le même raisonnement donne aussi que
$$\ell' = \ell = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Les deux sous-suites de rangs pairs et impairs convergent vers la même limite, on peut conclure que la suite converge vers cette limite
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

(10) (a) C'est un type de fonction Python à savoir écrire sans hésitation. Une boucle `for` permet de calculer u_n par calculs successifs de tous les termes intermédiaires en écrasant successivement la valeur du dernier terme calculé.

```python
import numpy as np

def u(n) :
    u=0 # initialisation du premier terme de la suite
    for k in range(n) :
        u=1/np.sqrt(1+u**2)
    return u
```

(b) Cette fois on cherche le premier entier qui satisfait une certaine condition, on va donc continuer à calculer *tant qu'* on ne l'a pas trouvé, on utilise pour cela une boucle `while`.

```python
def recherche(eps) :
    n=0
    while  np.abs(u(n)-np.sqrt((np.sqrt(5)-1)/2)) >= eps :
        n=n+1
    return n
```

Partie 3 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(11) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le cours (c'est le *théorème fondamental de l'analyse*), F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. À ce titre, elle est dérivable et comme sa dérivée est continue, F est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Naturellement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = f(x)$.

(12) Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut *ré*-exprimer

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Posons alors $u = u(t) = -t$ fonction affine rendant la formule de changement de variable licite. Celle-ci donne $\mathrm{d}u = u'(t)\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t$, puis, comme f est paire comme on l'a montré à la Question (1),

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x} f(-u)(\mathrm{d}u) = -\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = -F(x)$$

et F est bien impaire.

(13) (a) Soit $x > 1$ fixé. En factorisant par t^2 dans la racine et en remarquant que (t étant positif), on a $\sqrt{t^2} = t$, on a bien $\sqrt{1+t^2} = \sqrt{t^2(1+1/t^2)} = \sqrt{t^2}\sqrt{1+1/t^2} = t\sqrt{1+1/t^2}$.
Ensuite, on découpe, par Chasles, l'intégrale en deux comme suggérer, afin de se retrouver, pour la seconde intégrale, sur un intervalle où on va pouvoir appliquer notre remarque ci-contre.

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+1/t^2}}$$

Si $t \in [1, x]$, alors $t^2 \in [1, x^2]$ et $1 + 1/t^2 \leq 2$. Par croissance de la fonction racine, on a alors $\sqrt{1+1/t^2} \leq \sqrt{2}$ puis par passage à l'inverse

$$\frac{1}{\sqrt{1+1/t^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par multiplication par $1/t > 0$ puis par positivité de l'intégrale

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+1/t^2}} \geq \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln(t)\right]_1^x = \frac{\ln(x)}{\sqrt{2}}.$$

En notant alors

$$\kappa = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

qui est bien une constante strictement positive (car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur un segment), on a bien l'inégalité demandée.

(b) Comme $\ln(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, on déduit, par comparaison grâce à l'inégalité ci-dessus que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

Comme F est impaire, il suit que

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) = -\infty.$$

(14) (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > x^2$. Donc, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, que x^2 et x^2+1 en sont éléments, et que $|x| \geq -x$,

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x.$$

Donc $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Écrivons donc, comme suggéré (ce qui est possible car la quantité par laquelle on divise, pour compenser ce qu'on fait apparaître au numérateur, est strictement positive donc ne s'annule pas)

$$F(x) = \int_0^x \frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\left(\sqrt{1+t^2}\right)}\mathrm{d}t.$$

Procédons au changement de variable $u = u(t) = t + \sqrt{t^2+1}$. Ce dernier est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$ donc licite. On a

$$\mathrm{d}u = u'(t)\mathrm{d}t$$

Or

$$u'(t) = 1 + \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}$$

ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\left(\sqrt{1+t^2}\right)}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{x+\sqrt{1+x^2}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln(u)]_1^{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right). \end{aligned}$$

(15) Soit $a > 0$. On note $\mathcal{A}(a)$ l'aire de la surface délimitée par les droites d'équation $x = a$, $x = 2a$, l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = f(x)$. L'aire de cette surface est, par définition, l'intégrale de f sur $[a, 2a]$, c'est à dire

$$\mathcal{A}(a) = \int_a^{2a} f(t)\mathrm{d}t = F(2a) - F(a).$$

Afin d'en déterminer la limite, on fait le calcul explicite (car il s'agit d'une forme indéterminée).

$$\begin{aligned}
F(2a) - F(a) &= \ln\left(2a + \sqrt{(2a)^2 + 1}\right) - \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right) \\
&= \ln\left(2a\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2a^2}}\right)\right) - \ln\left(a\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}\right)\right) \\
&= \ln(2) + \ln(a) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2a^2}}\right) - \ln(a) - \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2a^2}}\right) - \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}\right) \\
&\underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).
\end{aligned}$$

Partie 4 : Étude d'une suite d'intégrales

On considère maintenant la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) \mathrm{d}x.$$

(15) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $[0;1]$ donc l'intégrale sur ce même segment, c'est à dire I_n, est bien définie et il en est de même de la suite (I_n).

(16) On calcule, en exhibant une primitive, les deux premiers termes de la suite.

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 \\
&= F(1) - F(0) \\
&= \ln\left(1 + \sqrt{1+1^2}\right) - \ln(1) \\
&= \ln\left(1 + \sqrt{2}\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 \\
&= \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

(17) On veut calculer

$$I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x$$

Posons alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) &=& \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ v(x) &=& x^2 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{lcl} u(x) &=& \sqrt{1+x^2} \\ v'(x) &=& 2x \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, rendant l'intégration par parties licite. Celle-ci donne

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 2x\left(1+x^2\right)^{1/2}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{2} - \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3} = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(18) Pour tout $x \in [0;1]$, $x^{n+1} \leq x^n$. De plus, d'après la première partie, $f(x) \geq 0$, pour tout x réel. Ainsi, on a, pour tout $x \in [0;1]$

$$x^{n+1}f(x) \leq x^n f(x).$$

Par les propriétés de l'intégrale, on en déduit que

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = I_n.$$

Donc la suite (I_n) est décroissante.

(19) La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0) donc, par le théorème de convergence monotone, elle converge vers une certaine limite $\ell \geq 0$.

(20) On a vu que f était comprise entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}$. Il suit donc trivialement que, pour tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^n$$

et par positivité de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Ceci donne l'encadrement demandé

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(21) Comme $\dfrac{1}{n+1} \to 0$, il suit, par le théorème des gendarmes, $I_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2

On considère trois suites $(un), (v_n)$ et (w_n) définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 1 \\ v_0 &=& 1 \\ w_0 &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} &=& 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ w_{n+1} &=& -u_n - 2v_n + w_n \end{array}\right.$$

(1) Il est indispensable dans ce type de programme (comme pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2) d'introduire des *variables auxiliaires* de sorte à ne pas perdre des informations dont on a encore besoin pour d'autres calculs.

```
def suites(n):
    u=1
    v=1
    w=0 # initialisation
    for k in range(n):
        x=u+2*v-w
        y=2*u+4*v-2*w
        z=-u-2*v+w
        u=x
        v=y
        w=z
    return [u, v, w]
```

On introduit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

(2) On applique la matrice f au vecteur coordonnées de (x, y, z). On trouve sans mal que

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z).$$

(3) (a) Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -6 \\ 12 & 24 & -12 \\ -6 & -12 & 6 \end{pmatrix} = 6A$$

et il suit immédiatement que $A^2 - 6A = 0$. Supposons alors que A soit inversible. Il existe alors une matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I$. Mais alors,

$$0 = A^{-1} \cdot 0 = A^{-1}\left(A^2 - 6A\right) = A - 6I$$

ou encore $A = 6I$ ce qui n'est pas vrai du tout! Ainsi, on peut conclure que A n'est pas inversible.

(b) On résout. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker}(f) & \iff f(u) = 0 \iff AX = 0 \\ & \iff \begin{cases} x + 2y - z & = 0 \\ 2x + 4y - 2z & = 0 \\ -x - 2y + z & = 0 \end{cases} \\ & \iff x = -2y + z \\ & \iff X = \begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $u_1 = (-2, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$, on a

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$$

ce qui veut dire que la famille (u_1, u_2) engendre $\operatorname{Ker}(f)$. Comme de plus ces ceux vecteurs forment clairement une famille libre (ils sont deux et ne sont pas colinéaires), la famille (u_1, u_2) est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

(c) Par théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(g) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1.$$

(4) (a) On applique A au vecteur coordonnées de u_3.

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\\-6\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

ainsi $f(u_3) = 6u_3$.

(b) Comme la famille (u_1, u_2, u_3) est composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la dimension est 3, il suffit que montrer que la famille est libre pour qu'elle en forme une base. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\iff \begin{cases} -2a + b + c &= 0 \\ a + 2c &= 0 \\ b - c &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2a + b + c &= 0 \\ b + 5c &= 0 \\ b - c &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2a - 4c &= 0 \\ b + 5c &= 0 \\ 4c &= 0 \end{cases} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est bien libre et forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On cherche donc, pour former la matrice D, à exprimer $f(u_1), f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3. Comme u_1 et u_2 sont dans le noyau de f, $f(u_1) = f(u_2) = 0$ et les deux premières colonnes de D sont nulles. On a ensuite trouvé $f(u_3) = 6u_3 = 0u_1 + 0u_2 + 6u_3$ donc on peut écrire

$$D = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

(5) La matrice P considérée est la matrice

$$P = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Les colonnes de P forment une base de $\mathbb{R}^3$: elle est donc inversible (on a déjà résolu à la question précédente l'équation de noyau). Inversons P par pivot de Gauss simultané.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -4 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2\\ 0 & 6 & 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(6) (a) On fait le calcul. Si on doit avoir $A = PDP^{-1}$ alors

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui est bien une matrice diagonale comme attendu.

(b) La petite récurrence à savoir faire.

- initialisation. Pour $n = 0$, on a bien
$$A^0 = I = PP^{-1} = PIP^{-1} = PD^0P^{-1}.$$
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \cdot A^n \\ &= PDP^{-1} \cdot PD^nP^{-1} \qquad (\mathbf{HR}) \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}, \end{aligned}$$
ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(c) La matrice D est diagonale, calculer ses puissances est immédiat :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

Il suit que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6^n & 2 \times 6^n & -6^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6^n & 2 \times 6^n & -6^n \\ 2 \times 6^n & 4 \times 6^n & -2 \times 6^n \\ -6^n & -2 \times 6^n & 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(7) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) On observe que

$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + 2v_n - w_n \\ 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ -u_n - 2v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Naturellement, on a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) C'est une récurrence trèèèèèèèèèès facile. Qu'on fait quand même.

- initialisation. Pour $n = 0$, $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$ et c'est vérifié.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_n = A^n X_0$. Alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \cdot A^n X_0 \qquad \text{(HR)} \\ &= A^{n+1} X_0, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(c) D'après tout ce qui précède, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6^n & 2 \times 6^n & -6^n \\ 2 \times 6^n & 4 \times 6^n & -2 \times 6^n \\ -6^n & -2 \times 6^n & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \times 6^n \\ 6 \times 6^n \\ -3 \times 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on obtient que, pour $n \geq 1$,

$$u_n = 3 \times 6^{n-1}, \quad v_n = 6^n, \quad w_n = -3 \times 6^{n-1}.$$

Exercice 3

Partie I : Cours en bourse d'une action

On s'intéresse aux **variations** journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On suppose que, chaque jour, le cours de l'action:

- monte d'une unité $(+1)$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$;
- ou bien descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On observe alors l'évolution de l'action pendant $2n$ jours.
On introduit les évènements A_j: "l'action monte d'une unité le $j-$ième jour" (où $1 \leq j \leq 2n$), V_k : "au bout des $2n$ jours, l'action a subi une évolution de $2k$" (avec $k \in [\![-n, n]\!]$ qui peut donc être négatif) et Z_n : "au bout des $2n$ jours, l'évolution du cours de l'action est positive ou nulle".

Par exemple, si $n = 2$, que le cours a baissé le premier jour mais augmenté les trois autres jours, on a une évolution de $-1 + 1 + 1 + 1 = 2$ et donc V_1 ainsi que Z_2 sont réalisés.

Enfin, on note $p_n = P(Z_n)$ et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est à dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

(1) (a) On utilise donc une boucle `for` pour parcourir les $2n$ jours. Avec probabilité p (ce qui se passe si `rd.random() <=p`) on augmente de 1 et dans le cas contraire, on baisse de 1. Le programme est sans difficulté.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def evo(n, p) :
    x=0
    for k in range(2*n) :
        if rd.random()<=p :
            x=x+1
        else :
            x=x-1
    return x
```

(b) La liste `L` contient, à l'issue de la boucle `for`, 1000 simulations de l'évolution du cours de l'action après $2n$ jours. Ensuite on parcourt cette liste et lorsque le terme est positif, la variable `c` (initialisée à 0) augmente de 1. Cette variable compte donc le nombre de réalisations où l'évolution est positive. On renvoie $c/1000$, c'est donc la fréquence observée correspondante soit une *estimation* (ou valeur approchée) de p_n.

(c) On a représenté graphiquement l'évolution de l'estimation de p_n pour n variant de 1 en 200. Le nuage de points semble relativement concentré autour de $1/2$. Il est raisonnable de conjecturer que, dans le cas $p = 1/2$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}.$$

(2) Z_1 est réalisé si et seulement si, après 2 jours, l'évolution est positive (ou nulle) ce qui peut se passer si, successivement, l'action baisse puis monte, ou monte puis baisse ou encore monte deux fois. Ceci s'écrit

$$Z_1 = [A_1 \cap \overline{A}_2] \cup [\overline{A}_1 \cap A_2] \cup [A_1 \cap A_2].$$

Ces trois alternatives étant deux à deux incompatibles, on peut calculer leur probabilité comme une somme. De plus, les évolutions deux jours successifs étant supposées indépendantes, on a

$$\begin{aligned}
p_1 &= P(Z_1) = P\left([A_1 \cap \overline{A}_2] \cup [\overline{A}_1 \cap A_2] \cup [A_1 \cap A_2]\right) \\
&= P(A_1 \cap \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) \\
&= P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_2) \\
&= pq + qp + p^2 = 2pq + p^2 \\
&= p(p + 2q) = p(2 - p)
\end{aligned}$$

(3) Soit $k \in [\![-n, n]\!]$. On suppose, dans cette question uniquement, que V_k est réalisé. On note alors x_n (respectivement y_n), le nombre de jours où l'action a augmenté (respectivement baissé).

(a) L'observation a lieu durant $2n$ jours et se découpent en deux catégories : les jours où l'action a augmenté et ceux où elle a baissé, leur total étant égal au nombre de jours, on a

$$x_n + y_n = 2n.$$

Par ailleurs, sachant que V_k est réalisé, au bout des $2n$ jours l'évolution est de $2k$. Il est clair que l'évolution correspond au nombre de fois où on augmente d'une unité auquel on soustrait le nombre de fois où l'action baisse d'une unité, c'est à dire

$$x_n - y_n = 2k.$$

Les deux équations ci-dessus donnent un système 2×2 que l'on résout immédiatement

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_n + y_n & = & 2n \\ x_n - y_n & = & 2k \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x_n & = & n+k \\ y_n & = & n-k \end{array} \right.$$

(b) Si on connait les $n+k$ jours où on veut l'action augmente, on connait de fait nécessairement le comportement de l'action les $n-k$ autres jours : elle baisse. Les évolutions sont indépendantes et chaque jour, l'action augment avec probabilité p et baisse avec probabilité q. La probabilité que cette évolution précise ait lieu est donc égale à

$$\underbrace{p \times p \times ... \times p}_{n+k \text{ fois}} \times \underbrace{q \times q \times ... \times q}_{n-k \text{ fois}} = p^{n+k}q^{n-k}.$$

(c) V_k est réalisé si et seulement si l'évolution de l'action au bout de $2n$ jours est de $2k$ ce qui correspond à une hausse pendant $n+k$ jours et baisse pendant $n-k$ jours. On connait la probabilité de chacune de ces évolutions, il faut donc multiplier par le nombre d'évolutions de $2n$ jours avec $n+k$ jours de hausse. Il y a $\binom{2n}{n+k}$ façons de placer les $n+k$ jours de hausse au sein des $2n$ jours d'observation. Les autres jours étant nécessairement des jours de baisse. Au final, on a bien

$$P(V_k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k}q^{n-k}$$

(4) Pour que l'évolution soit positive (ou nulle) après $2n$ jours, il faut qu'elle ait une valeur de $2k$ avec $k \geq 0$, c'est à dire que

$$Z_n = \bigcup_{k=0}^{n} V_k$$

Cette réunion étant disjointe, on peut écrire

$$p_n = P(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} P(V_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} p^{n+k}q^{n-k},$$

ce qui est bien la formule attendue.

Partie II : Des coefficients binomiaux

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

(5) (a) D'après la définition de S_n, on a

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{1} \binom{2}{1+i} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \\ &= 2+1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=0}^{2} \binom{4}{2+i} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \\ &= 6+4+1 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=0}^{3} \binom{6}{3+i} = \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \\ &= 20+15+6+1 = 42. \end{aligned}$$

(b) On rappelle qu'en Python, la commande `np.prod(liste)` permet d'obtenir le produit des valeurs de la `liste` prise en argument.

(i) Par définition,

$$\binom{2n}{n+i} = \frac{(2n)!}{(n+i)!(n-i)!} = \frac{\displaystyle\prod_{j=n-i+1}^{2n} j}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n+i} j}.$$

(ii) Ceci permet d'écrire, sans difficulté

```
def suite_S(n):
  y=0
  for k in range(n):
    y=y+np.prod(range(n-i+1,2*n+1))/np.prod(range(1,n+i+1))
  return y
```

(c) D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} 1^i 1^{2n-i} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

(d) Par définition,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} && \text{(d'une part)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} && \text{(par symétrie)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} \end{aligned}$$

On a donc

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} + \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} + \binom{2n}{n}.$$

Ceci permet, avec la question précédente,

$$2S_n = 2^{2n} + \binom{2n}{n},$$

ce qui donne bien, en divisant par 2,

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

(6) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{u_{p+1}}{u_p} &= \frac{\binom{2(p+1)}{p+1}2^{-2(p+1)}}{\binom{2p}{p}2^{-2p}} \\
&= \frac{[2(p+1)]!p!p!}{2^2(p+1)!(p+1)!(2p)!} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)2(p+1)} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) On raisonne, comme demandé, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

- initialisation. Pour $p = 1$, on a

$$0 \leq u_1 = \binom{2}{1}2^{-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

car $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

Alors, d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
u_{p+1} &= \frac{2p+1}{2p+2}u_p \leq \frac{2p+1}{2p+2}\frac{1}{\sqrt{2p+1}} = \sqrt{\frac{(2p+1)(2p+1)}{(2p+2)(2p+2)(2p+1)}} \\
&\leq \sqrt{\frac{2p+1}{(2p+2)^2}}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{2p+1}{(2p+2)^2} \leq \frac{1}{2p+3} &\iff (2p+1)(2p+3) \leq (2p+2)^2 \\
&\iff 4p^2+8p+3 \leq 4p^2+8p+4 \\
&\iff 3 \leq 4,
\end{aligned}$$

ce qui est vrai. On a donc la majoration voulue et la récurrence est terminée.

(c) Par théorème des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\lim_{p \to +\infty} u_p = 0.$$

(7) On revient aux variables aléatoires de la Partie 1. On suppose, dans cette question que $p = 1/2$. On a, d'après la question précédente et la Question (4) de la Partie 1

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} = 2^{-2n} S_n \\ &= 2^{-2n} \left(2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right) \qquad \text{(d'après la Question } (5d)) \\ &= \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.
On utilise les calculs ci-avant.

$$\begin{aligned} p_1 &= 2^{-2} S_1 = \frac{3}{4}, \\ p_2 &= 2^{-4} S_2 = \frac{11}{16} \\ p_3 &= 2^{-6} S_3 = \frac{42}{64} = \frac{21}{32}. \end{aligned}$$

, À la Question (2), on avait trouvé la valeur de p_1 en fonction de p et q. On vérifie que dans ce cas particulier où $p = q = 1/2$, cela coïncide :

$$p_1 = p(p + 2q) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4},$$

ce qui est bien ce qu'on vient d'obtenir. Ouf, sauvés.

On observe aussi que

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + u_n\right).$$

En particulier,

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2},$$

ce qu'on avait conjecturé à l'aide de Python.