# Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Approfondies - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
H2B - Lycée Carnot, Paris 17e.

## Quinzaine de colle n°I

*Période du 13/03 au 24/03*

# Semaine du 13/03 au 17/03

### Programme de colle

- Reprise du DST du 06/03.
- Dérivabilité. *On posera un exercice de suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec utilisation de l'IAF.*
- **Chapitre I - Intégration.** Notion de primitive. Notion d'intégrale. Calcul d'une intégrale *via* obtention d'une primitive à vue (ou après quelques calculs sur la fonctions à intégrer - décomposition en éléments simples...). Pas encore d'IPP ou de changement de variable cette semaine.

### Questions de cours

- Énoncés des propriétés de l'intégrale (Relation de Chasles, Linéarité, Positivité, inégalité triangulaire)
- Énoncé du théorème fondamental de l'analyse
- Montrer, par encadrement et rigoureusement, que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$$

### Suggestions d'exercices

**Exercice 1.** Calculer les intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^2 (3x^4+5x+e^{3x})\mathrm{d}x, \quad (ii)\ \int_{1/4}^1 \frac{4\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}, \quad (iii)\ \int_1^2 3^x \mathrm{d}x.$$

**Exercice 2.**

(1) Calculer les intégrales suivantes (on reconnaîtra, sous le signe intégral, des combinaisons de dérivées de fonctions composées)

$$(i)\ \int_1^0 (x^2+1)e^{x^3+3x}\mathrm{d}x, \quad (ii)\ \int_0^1 \frac{5x}{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad (iii)\ \int_0^1 \frac{5x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x, \quad (iv)\ \int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}\mathrm{d}x.$$

(2) Déterminer la primitive $F$ sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ telle que $F(0) = \ln(2)$ avec

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(3) Donner la primitive $F$ définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0 de la fonction $f$ définie par

$$f(t) = \frac{t^3}{(1+t^4)\sqrt{1+t^4}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 3.** Montrer que, pour tout $x$ réel, $\dfrac{1}{1+e^x} \leq e^{-x}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{nt}}.$$

**Exercice 4.**

(1) Montrer que

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

(2) Établir par encadrement que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

(3) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

**Exercice 5.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.
(2) Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \ln x$.
(3) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
(4) Établir pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0,1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \ln x$.
(5) En déduire $\lim_{x\to0^+} f(x)$.
(6) Dresser le tableau de variation de $f$.
(7) Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté $u_n$, vérifiant

$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = n.$$

(8) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq0}$ est croissante.
(9) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

**Exercice 6.** Soient $f$ la fonction définie sur $[-2,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $(u_n)$ définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ u_0 & \geq & 0. \end{array}\right.$

(1) Montrer que $f([1;3]) \subset [1;3]$.
(2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1;3]$, notée $\alpha$.
(3) Montrer que, pour tout $x \in [1;3]$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.
(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}|u_n - \alpha|.$$

(5) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

(6) Conclure quant à la convergence de $(u_n)$.
(7) Écrire un programme Python qui calcule et affiche une approximation de $\alpha$ à $\varepsilon$ près, où $\varepsilon$ est entré par l'utilisateur.

# Semaine du 20/03 au 24/03

### Programme de colle

- Reprise du DST du 06/03.
- **Chapitre I - Intégration.** Tout le chapitre.

### Questions de cours

- Énoncé du théorème fondamental de l'analyse
- Énoncé de la formule d'intégration par parties
- À l'aide du changement de variables $u = \ln(t)$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{2t\ln(t)+t}$.

### Suggestions d'exercices

☞ Exercices semaine précédente

**Exercice 7.** Pour tout entier $n$ on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x.$$

(1) (a) Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \to xe^{-x^2}$.
(b) En déduire pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout $n$ de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+1}.$$

(b) En déduire la limite de $I_n$ et celle de $nI_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 8.** On considère la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que $G$ est impaire.
(2) Montrer que $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $G'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(3) Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} \geq t.$$

En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty.$$

(4) Dresser le tableau de variations complet de $G$.

**Exercice 9.** Pour tout couple $(p,q)$ d'entiers naturels, on pose $I\left(p,q\right) = \displaystyle\int_0^1 x^p\left(1-x\right)^q \mathrm{d}x$.

(1) Montrer que , pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$I\left(p,q\right) = \frac{q}{p+1} I\left(p+1, q-1\right).$$

(2) En déduire que, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, I\left(p,q\right) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I\left(p+q, 0\right)$.
(3) Déterminer$I\left(p+q,0\right)$ et montrer finalement que

$$I\left(p,q\right) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$