Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Approfondies - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
H2B - Lycée Carnot, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°II

Période du 27/03 au 07/04

Semaine du 27/03 au 31/03

Programme de colle

- **Chapitre I - Intégration.** On pourra s'assurer qu'absolument tout le monde sait faire une IPP et un changement de variable et on insistera sur l'étude d'une fonction définie par une intégrale qui semble poser problème.
- **Chapitre II - Espaces vectoriels.** Notion de sous-espace engendré (tout le monde aura à résoudre un système linéaire et à présenter l'ensemble des solutions à l'aide du symbole Vect(...)). Familles libres. Familles génératrices de $\mathbb{R}^n$. Et à partir de mardi : bases de $\mathbb{R}^n$.

Questions de cours

- Définition d'une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Définition d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.
- Montrer que la famille $((1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1))$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Suggestions d'exercices

Exercice 1. On considère la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t$.

(1) Montrer que G est impaire.
(2) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $G'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(3) Montrer que, pour tout $t \geq 0$,
$$\frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} \geq t.$$
En déduire que
$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty.$$
(4) Dresser le tableau de variations complet de G.

Exercice 2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x$.

(1) Montrer que , pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$
(2) En déduire que, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.

(3) Déterminer$I\left(p+q,0\right)$ et montrer finalement que

$$I\left(p,q\right)=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Exercice 3. Résoudre les équations $AX=0,\ \ AX=X\ $ et $\ AX=3X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$où, A est la matrice ci-dessous.
On présentera les solutions sous forme de *sous- espace vectoriel (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) engendré* par une famille (finie) de vecteurs.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $\{u_1,u_2,u_3\}$ une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\{2u_1,u_1-u_2,u_1-u_2+2u_3\}$ est encore une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Écrire le sous-ensemble G suivant comme sous-espace engendré par une famille de vecteurs à expliciter.

$$G=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ 3x-y+2t=0\right\}.$$

Un peu de programmation sous Python

On essaiera dans la mesure du possible d'intégrer un maximum de questions Python aux exercices posés.

Exercice 6. Écrire une fonction `def symetrie(P,Q):` qui prend en argument deux listes de même longueur `P=`$[p_0,...,p_n]$ et `Q=`$[q_0,...,q_n]$ et qui calcule et renvoie la valeur de la somme `s` où

$$\mathtt{s}=\sum_{i=0}^{n}p_iq_{n-i}.$$

Exercice 7. Écrire une fonction `def ordre_inverse(x):` qui prend en argument un nombre entier `x` et renvoie un nombre qui composé des mêmes chiffres que `x` mais dans l'ordre opposé. Par exemple, `ordre_inverse(8973)` renverra 3798.
On commencera par écrire une fonction `def taille(x):` qui renvoie le nombre de chiffres dont `x` est composé.

Semaine du 03/04 au 07/04

Programme de colle

- **Chapitre II.** Familles libres, génératrices bases.
  Applications linéaires : montrer qu'une application est linéaire. Matrice d'une application dans une base quelconque.
  A partir de mercredi: noyau et image d'une application linéaire.

Questions de cours

- Définition d'une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Définition d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

- Montrer que la famille $((1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1))$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- Écrire la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ puis celle dans la base $\mathcal{F}=\{-e_1,e_1-e_2,-e_1+e_2+4e_3\}$, où

$$f(x,y,z)=(x+2y-z,-y+z,3z).$$

Suggestion d'exercices

Exercice 8. On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on introduit les vecteurs

$$w_1 = (1, -3, 0), \quad w_2 = (-1, 2, 0), \quad \text{et} \quad w_3 = (0, 0, 1)$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = w_1, \quad f(e_2) = w_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = w_3.$$

(1) Exprimer w_1, w_2 et w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3.
(2) En déduire la matrice de f dans la base canonique.
(3) Expliciter $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.

Exercice 9. Soit $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fixé. Montrer que l'application $f : \ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto u - (x + y + z)v$ est linéaire. Écrire (en fonction de a, b, c) sa matrice dans la base canonique.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^4$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme $f\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_4, \quad f(e_2) = f(e_1) - e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_4) = -3e_1 - 2e_2 + e_3 - 2e_4.$$

(1) Écrire la matrice K de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on dire de l'inversibilité de K?
(3) Déterminer la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base canonique.
(4) On introduit alors les vecteurs

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

  (a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
  (b) Exprimer, pour $i = 1, 2, 3, 4$, $f(v_i)$ en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4. En déduire la matrice de f, notée L, dans la base $\mathcal{C}$.

(5) On introduit la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{C}$.
  (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
  (b) Que vaut $P^{-1}KP$?