Math ECG 1. 2022-2023

Mathématiques Appliquées- F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
E1A - Lycée Carnot, Paris 17e.

Truel au soleil

Avril 2023

Le duel, aussi absurde que tragique ou romantique apparait aussi dans l'histoire des mathématiques (on pourra lire le paragraphe concerné sur la page wikipédia consacrée à Evariste Galois : https://fr.wikipedia.org/wiki/Evariste_Galois).
On propose ici une activité utilisant d'un point de vue théorique quelques résultats sur les séries et permettant un exercice *transverse* avec des probabilités et de la simulation sous Python.

Pour toute l'activité, on importe une bonne fois pour toutes les bibliothèques d'usage sous leurs alias habituels :

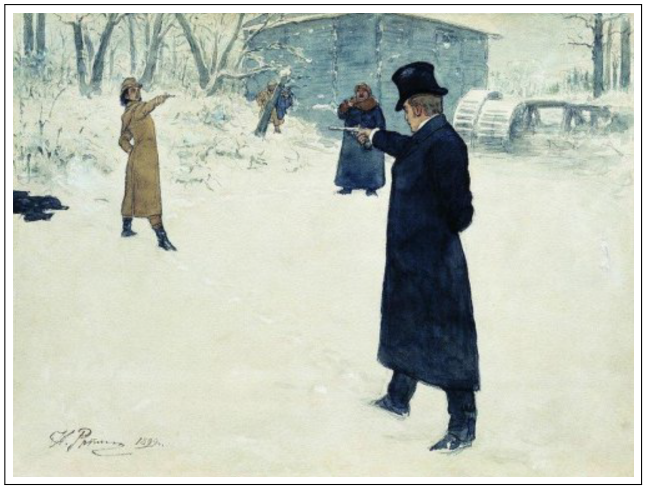
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

"J'ai été provoqué par deux patriotes... il m'a été impossible de refuser"

Trois gentlemen, Mr. White, Mr. Grey et Mr. Black se retrouvent opposés dans un *truel*, où chaque adversaire tire à son tour jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'un.

Les trois hommes n'ont pas les mêmes niveaux de tir; Mr. Black fait mouche à chaque tir alors que Mr. Grey ne touche que deux fois sur trois. Quant à Mr. White, il ne réussit son tir qu'une fois sur trois. Les hommes sont des gentlemen, ils laissent donc Mr. White tirer en premier, puis Mr. Grey et enfin Mr. Black.

Mr. Black visera toujours, tant que celui-ci est vivant, Mr. Grey, et Mr. Grey essaiera également toujours de toucher Mr. Black. Mr. White en revanche se demande s'il doit, commencer par (essayer de) faire tomber Mr. Black ou Mr. Grey voire volontairement rater son tir et les laisser s'entretuer jusqu'à être engagé dans un duel, donnant ainsi lieu à trois stratégies, numérotées 1, 2 et 3.



Duel between Onegin and Lenski, Ilya Repin, 1899. Pushkin Museum, Moscou. Domaine public.

Partie 1 : Duel entre Mr. White et Mr. Grey

Commençons pour simplifier par oublier Mr. Black. Il s'agit alors d'un **duel** entre Mr. White et Mr. Grey. Ce duel propose deux alternatives; Mr. White peut tirer le premier, ou bien ce sera Mr. Grey.

(1) Dans cette question, on considère l'alternative ou Mr. White tire le premier.
Expliquer la fonction Python suivante qui renvoie 1 ou 0 selon que Mr. White sort victorieux ou mort de l'affrontement.

```
def duel( ) :
    while rd.random() > 1/3 :
        if rd.random() <= 2/3 :
            return 0
    return 1
```

(2) Écrire une fonction analogue `def duel2() :` qui renvoie 1 ou 0 selon que Mr. White sort victorieux ou mort du duel mais cette fois dans le cas où Mr. Grey tire le premier.

(3) On **admet** que la fréquence des valeurs observées sur des échantillons de taille 1000 donne des *estimations* (valeurs approchées) des probabilités de victoire de Mr. White dans chacune des deux alternatives du duel.
Recopier et exécuter la suite d'instruction permettant d'afficher le diagramme à bâtons des fréquences observées, et estimer alors empiriquement les probabilités de victoire de White lorsqu'il tire en premier. Adapter les instructions pour estimer cette probabilité quand Grey commence.
On expliquera scrupuleusement comment tourne le programme.

```
N=1000  # taille de l'échantillon

# White tire en premier
sample = [duel() for k in range(N)]
F=np.zeros(2)
for k in range(N) :
    F[sample[k]] +=1
F=F/N
plt.bar([0,1], F)
plt.show()
```

(4) (a) On se place à nouveau dans l'alternative où Mr. White tire le premier. On introduit les évènements suivants (pour $k \in \mathbb{N}^*$)

- A : "M. White sort victorieux du duel"
- A_k : "M. White réussit atteint sa cible pour la première fois à son $k-$ième tir (et Grey décède des suites de celui-ci)"
- W_k : "le $k-$ième tir de White est un succès"
- G_k : "le $k-$ième tir de Grey est un succès"

(i) Exprimer A_k à l'aide des évènements W_i et G_i (et de leurs contraires). En déduire $P(A_k)$.
(ii) Exprimer A à l'aide des évènements A_k. En déduire $P(A)$. Est-ce cohérent avec l'estimation obtenue précédemment avec Python ?

(b) Déterminer rigoureusement la probabilité que White sorte victorieux du duel quand Grey tire en premier. Comparer avec l'estimation obtenue ci-avant.

Partie 2: Trois stratégies pour Mr. White

On revient au problème initial et on veut écrire trois fonctions d'en-têtes respectives `truel_1() :`, `truel_2() :` et `truel_3() :` correspondant respectivement aux trois stratégies possibles pour notre homme.

(5) **Stratégie 1**.

(a) On propose les commandes suivantes pour la première fonction. Expliquer pourquoi elles conviennent

```
def truel_1() :
    if rd.random() <= 1/3 :
        return duel2( )
    else :
        if rd.random() <= 2/3 :
            return duel()
        else :
            if rd.random() <= 1/3 :
                return 1
            else :
                return 0
```

(b) Estimer alors la probabilité de victoire de White avec la stratégie 1.

(6) Adapter la fonction précédente pour estimer les probabilités de victoire de White avec les deux autres stratégies. Quelle semble être la meilleure stratégie ?
On pourra représenter un diagramme à bâtons avec trois bâtons dont les hauteurs seront les estimations respectives des probabilités de victoire avec chacune des trois stratégies.

(7) (*) Proposer une modélisation théorique de la situation et retrouver ces résultats par le calcul.

Annexe : simulation d'un évènement aléatoire de probabilité p

Élément de cours en Python

La commande `rd.random( )` de la bibliothèque `numpy.random` (importée sous l'alias `rd`) renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 selon une certaine loi de probabilité[a]. Plus précisément, si $p \in [0;1]$, la probabilité que le nombre renvoyé soit inférieure ou égale à p (ou dans un intervalle de longueur p) vaut exactement p.

On **identifie** et décide donc de représenter un évènement de probabilité p par le fait que le nombre aléatoire ainsi renvoyé soit inférieur ou égal à p (ou dans un intervalle de longueur p). Ainsi, pour simuler la réalisation d'un évènement de probabilité p, on utilisera la commande

```
if rd.random() <= p :
```

et pour simuler son contraire

```
if rd.random() > p :
```

[a] on verra dans le cours de deuxième année qu'il s'agit de la loi uniforme (continue) $\mathcal{U}([0;1])$