Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Révisions (2)

Retour sur le programme avec des exercices de synthèse

.

Exercice 1

Notions abordées

- Suites récurrentes
- Séries télescopiques
- Produits

Énoncé

Dans cet exercice, on admet le résultat ci-dessous, appelé *lemme de Cesaro*.
Si une suite (a_n) *converge vers le réel* ℓ*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$$

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n^2+1}{2} \end{array}\right.$.

(1) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a $0 \leqslant u_n < 1$.
(b) Étudier les variations de la suite (u_n).
(c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

(2) Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$.

(a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}.$$

(b) Utiliser le *lemme de Cesaro* pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(c) En déduire que

$$u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(d) La série $\sum v_n$ est-elle convergente?

(3) (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def u(n)` qui renvoie la valeur de u_n.
(b) En déduire un programme, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $1 - u_n < 10^{-3}$.

On introduit maintenant la suite (p_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$$

et on note $\omega_n = \ln(p_n)$.

(4) (a) Justifier que la suite (ω_n) est bien définie.
(b) Expliciter une suite (a_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\omega_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(c) Déterminer, à l'aide d'un développement limité usuel, la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(d) À l'aide du *lemme de Cesaro*, en déduire la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2

Notions abordées

- Suites récurrentes
- IAF
- Séries

Énoncé

(1) Soit f la fonction, dont la courbe dans un repère orthonormé est notée $\mathcal{C}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right).$$

(a) Dresser le tableau de variations de f.
(b) Montrer que la courbe Γ d'équation $y = \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ est asymptote à $\mathcal{C}$ et tracer les deux courbes sur un même graphique.
(c) Établir, pour tout réel $x \geq 1$, l'encadrement $0 \leq f'(x) < 1$. En déduire, pour $x \geq 1$, le signe de $f(x) - x$ et les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

(2) Étudier la suite définie par $u_0 \in [1; +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(3) (a) Justifier l'existence d'un réel $a > 1$ tel que $x \in [1; a] \Longrightarrow f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n?

Exercice 3

Notions abordées

- Continuité. Dérivabilité.
- Développements limités.
- Suite d'intégrales impropres.
- Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0;1)$.
- Changement de variable.
- `Python`. Calcul du premier entier vérifiant une condition donnée.

Enoncé

(1) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
(d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
(b) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(c) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.
(d) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
(e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

(3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right).$$

(a) Montrer, à l'aide de la question 2e, que pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$

(b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} \leq 1.$$

(d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(e) On note φ une densité et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Rappeler la formule définissant φ puis dresser le tableau de variation complet de Φ sur $\mathbb{R}$ en précisant la valeur de $\Phi(0)$.

(f) Montrer l'encadrement :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2} \right).$$

On pourra utiliser la question 3a puis effectuer le changement de variable $u = x\sqrt{n}$.

(g) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(h) Écrire un programme en `Python` qui détermine une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$.

(i) Déterminer à présent par le calcul une valeur de n pour laquelle $I_n \leq 10^{-1}$. *On donne $50\pi \approx 157.08$.*

Exercice 4

Notions abordées

- Séries. Comparaison séries/intégrales
- Intégration par parties
- Valeur approchée avec Python

Énoncé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \frac{n-1}{n^3+1}, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(1) Montrer que l'on a, pour $n \geqslant 2$:

$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente. On notera A sa somme (qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement).

(2) Donner, en fonction de n, un majorant très simple de $A - A_n$.

(3) À partir de quelle valeur de n, peut-on affirmer que A_n est une valeur approchée de A à moins de 10^{-4} près ?

(4) Pour accélérer la convergence, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - b_n.$$

(a) Calculer b_n en fonction de n et vérifier que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 < b_n < \frac{6}{n^5} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{6}{t^5} \mathrm{d}t$$

(b) Vérifier que l'on a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, on pose

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Exprimer B_n en fonction de n et de A_n, en déduire que la suite (B_n) est convergente.

(d) Soit B la limite de la suite (B_n). Montrer que : $B - B_n \leq \dfrac{3}{2n^4}$.

Écrire un programme qui calcule et affiche une valeur de B à 10^{-4} près.

Mini Problème 1

Notions abordées

- Variables aléatoires à densité
- Simulation par inversion
- Bienaymé-Tchebychev, estimation ponctuelle

Énoncé

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire

Dans cette exercice, θ désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}}, & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

(1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

(2) Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.
(3) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.

(4) (a) Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.
  (b) Montrer que
$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad 2^x(1-x) \leqslant 1.$$
  (c) Comparer $E(X)$ et M_e.

(5) Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.

  (a) Montrer que $P_{(X>a)}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.
  (b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation de X

(6) On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.

  (a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
  (b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(7) Écrire des commandes Python permettant de simuler X.

Partie 3 : estimation de θ

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on considère n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

(8) On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

  (a) Expliciter l'espérance de T_n.
  (b) Calculer ensuite $V(T_n)$.

(9) Montrer alors que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} P\left(|T_n - \theta| > \varepsilon\right) = 0.$$

Interpréter ce résultat.

Mini Problème 2

Notions abordées

- Variables aléatoires discrètes
- Sommes doubles
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Simulation sous Python

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir *Pile* et celle d'obtenir *Face* étant donc toutes les deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier *Pile*.

Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, ..., k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

(1) On décide de coder l'événement « obtenir un *Pile* » par 1 et l'événement « obtenir un *Face* » par 0.
On rappelle que la fonction `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1[$ et `np.floor(x)` renvoie la partie entière de x.

  (a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

```
def simul_Z( ):
    z  = 1
    hasard= ..........
    while hasard ...... :
            z = ....
            hasard = .....
    return z
```

  (b) Quelle instruction faut il rajouter à ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

(2) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

(3) Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

(4) (a) Pour tout couple (i,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $P_{[Z=k]}(X=i)$.

(b) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(c) On **admet**, dans cette question, que les sommes peuvent s'intervertir :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} ... = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} ....$$

Vérifier que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) = 1.$$

(5) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a

$$iP(X=i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

(6) En déduire que X possède une espérance.

(7) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question **4c)**, que $E(X) = \dfrac{3}{2}$.

(8) Montrer que X a un moment d'ordre 2.

(9) Établir alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question **4c)**, que

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(10) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

(11) En déduire la valeur de $E(X^2)$ et vérifier que $V(X) = \frac{11}{12}$.

(12) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, pour la variable X.

(13) En déduire que $P(X > 3) < \frac{11}{27}$.

(14) On se propose dans cette question de calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X \geq 3)$.

(a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x.$$

(d) Établir alors que $P(X=1) = \ln(2)$ puis donner la valeur de $P(X=2)$.

(e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $P(X \geq 3)$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la treizième question?

Mini-Problème 3

Notions abordées

- Réduction
- Fonctions de deux variables

Énoncé

Partie I

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer le rang puis le noyau et de A. En déduire que 0 est valeur propre de A.

(2) (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(b) Vérifier que 4 et 6 sont deux valeurs propres de A et déterminer les sous espaces propres associés.
(c) Déterminer une matrice Q inversible et une matrice D diagonale dont les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant telles que

$$A = QDQ^{-1}.$$

(3) Soient α, β et γ trois nombres réels non nuls et P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.
(a) Montrer en utilisant la question précédente que P est inversible.
(b) Calculer le produit $P \cdot {}^t P$ et en déduire l'existence de valeurs de α, β et γ telles que ${}^t P = P^{-1}$. On se placera dans cette situation dans la suite de l'exercice.
(c) Justifier que $A = P \cdot A' \cdot {}^t P$.

Partie II

Soient x, y et z trois réels, on définit les matrices colonnes et lignes respectives

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad {}^t X = (x, y, z)$$

et on pose

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz + 2z^2.$$

(4) (a) Montrer que : ${}^t X \cdot A \cdot X = g(x, y, z)$
(b) Montrer que la transposée de la matrice $({}^t P \cdot X)$ est $({}^t X \cdot P)$.
(c) En déduire que

$$g(x, y, z) = 4y'^2 + 6z'^2, \qquad \text{où on a posé} \qquad {}^t P.X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

(5) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = g(x, y, y^2), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Expliciter $f\,(x, y)$ et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer les points critiques de f.
(c) Former la matrice hessienne en chacun des points critiques précédents. Que peut-on conclure quant à la nature de ces points critiques?
(d) Montrer en utilisant la question **(4)(c)** que $(0, 0)$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Problème 1

Notions abordées

- Intégration par parties
- Récurrences techniques
- Dérivées $n-$ième
- Équivalents
- Marches aléatoires

Énoncé

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$.

(2) (a) Soit $x \in]0;1[$. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de f.
(*On pourra s'aider d'une intégration par parties.*)

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0;1[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

(3) Soit $x \in]0;1[$ fixé.
(a) Montrer que la fonction $\varphi_x \,:\, t \mapsto \frac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0;x]$.
(b) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

(c) On **admet** que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}, \qquad n \to +\infty.$$

Montrer que

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}, \qquad n \to +\infty.$$

(d) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

(4) Soit x un réel de $]0;1[$.
Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Partie II : Une marche aléatoire

Soit p un réel fixé de $]0;1[$.
On considère une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(Y_n = 1) = p, \qquad P(Y_n = -1) = 1-p.$$

On dit qu'une telle variable suit la loi de *Rademacher* de paramètre p.

(5) Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de Y_n.

On introduit ensuite une suite (X_n) de variables aléatoires définie comme suit

$$\begin{cases} X_0 &= 0 \\ X_{n+1} &= X_n + Y_n \end{cases}$$

(6) Simulation sous Python
 (a) Écrire une fonction d'en-tête `def simul_Y(p):` qui renvoie une simulation de la loi de Rademacher de paramètre p.
 (b) Écrire alors une fonction d'en-tête `def simul_X(n,p):` qui renvoie une simulation de X_n.

(7) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.
 (a) Reconnaître la loi de Z_n. On précisera son (ou ses) paramètre(s).
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?
 (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\qquad X_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.$

(8) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X_n = 0)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{2n+1} = 0, \qquad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

(9) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p \neq \dfrac{1}{2}$.
 (a) Montrer que $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.
 (b) À l'aide de la Partie I, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ converge et préciser sa somme.

(10) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p = \dfrac{1}{2}$.
 (a) Montrer que $p_{2n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, $n \to +\infty$.
 (b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ diverge.

(11) On **admet** le théorème suivant (nommé *Lemme de Borel-Cantelli*):
Soit (A_n) une suite d'évènements. Si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle.
Que permet alors de conclure le résultat montré à la Question (9b)?

(12) (*) Le but de cette question est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli admis-ci dessus. On considère donc une suite d'évènements (A_n) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que la série $\sum P(A_n)$ converge. On pose ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $B_{n+1} \subset B_n$. On pose $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

(b) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes:
$$(*) \quad \omega \in B \iff (**) \quad \omega \in A_k \text{ pour une infinité de valeurs de } k$$

(c) Montrer que $P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

(d) Justifier que $P(B) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n)$. Conclure que $P(B) = 0$.

Problème 2 - D'après HEC 2015

Notions abordées

- Loi géométrique. Loi exponentielle.
- Loi du max, loi du min.
- Couples de v.a. Covariance.
- Convergence en loi.
- Intervalle de confiance.
- Estimateurs. Biais.
- `(SciLab)` Simulation de loi par inversion.

Partie I. Loi exponentielle

(1) (a) Rappeler la valeur de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Soit λ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$). On pose
$$Y = X_1 - X_2, \quad T = \max(X_1, X_2), \quad \text{et} \quad Z = \min(X_1, X_2).$$

(2) Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

(3) (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq x])$, pour tout réel x.
(b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$, $V(Y)$.

(4) Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z, puis en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

(5) (a) Montrer que pour tout réel t, on a
$$F_T(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$
(b) Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.
(c) Justifier l'existence de $E(T)$ et $V(T)$. Montrer, à l'aide de changements de variables affines, que
$$E(T) = \frac{3}{2\lambda}, \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{5}{4\lambda^2}.$$

(6) On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que $r = 1/\sqrt{5}$.

(7) (a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.
(b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.
(c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\,\mathrm{d}t$$
est convergente et qu'elle vaut $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$. (*On distinguera deux cas :* $y \geq 0$ et $y < 0$.)

(d) Établir que la fonction $y \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.

(e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie II. Loi géométrique

Soient p un réel de $]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$).

On pose :

$$Y = X_1 - X_2, \quad T = \max(X_1, X_2), \quad \text{et} \quad Z = \min(X_1, X_2).$$

On rappelle que

$$T + Z = X_1 + X_2 \quad \text{et que} \quad T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|.$$

(8) (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

(b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(_1 + X_2)$, $E(X_1 - X_2)$, et $V(X_1 - X_2)$.

(c) Établir la relation

$$P([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}.$$

(9) (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité

$$[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k].$$

(c) En déduire la relation suivante

$$P(T = k) = 2P(X_1 = k) - P(Z = k).$$

(d) Établir la formule :

$$V(T) = \frac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}.$$

(10) (a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$. En déduire, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $P([Z = j] \cap [Z = T])$.

(b) Montrer que pour tout couple $(j, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$P([Z = j] \cap [T - Z = l]) = 2p^2 q^{2j+l-2}.$$

(c) Montrer, en distinguant les trois cas $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$, que, pour tout $k \in mathbbZ$,

$$P([X_1 - X_2 = k]) = \frac{pq^{|k|}}{1+q}.$$

(d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

(e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.

(11) (a) A l'aide du résultat de la Question 10.e, calculer $\operatorname{cov}(Z, T)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

(b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

(c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T).

(d) Déterminer pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

(e) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$. Calculer $E(D_j)$.

Partie III. Convergences

Dans les questions 12 à 15, λ désigne un paramètre réel strictement positif, **inconnu**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \text{et} \quad J_n = \lambda S_n.$$

(12) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(J_n)$ et $V(J_n)$.

(13) On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par la formule

$$f_{J_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{si } x > 0 \\ \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

(a) À l'aide du théorème de transfert, établir pour tout entier $n \geq 3$, l'existence de $E\left(\frac{1}{J_n}\right)$ et de $E\left(\frac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.

(b) On pose, pour tout entier $n \geq 3$,

$$\widehat{\lambda_n} = \frac{n}{S_n}.$$

Justifier que $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur de λ. Est-il sans biais? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda_n}$ en λ.

(14) Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

(a) Enoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement

$$P([-u_\alpha \leq N_n \leq u_\alpha]) = 1 - \alpha.$$

(c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle

$$\left[\left(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}, \left(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\widehat{\lambda_n}\right]$$

est un intervalle de confiance de λ au risque α. On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda_n}$ sur le n-échantillon.

(15) Avec le n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α.

(a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ. Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?

(b) Établir l'égalité

$$\beta = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\Phi^{-1}(\alpha/2)\right).$$

(c) En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible?

Dans les questions 16 à 18, on suppose que $\lambda = 1$.

(16) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \max\left(X_1, X_2, ..., X_n\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $x \geq 0$, on pose

$$g_n\left(x\right) = \int_0^x F_{T_n}\left(t\right) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h_n\left(x\right) = \int_0^x t f_{T_n}\left(t\right) \mathrm{d}t.$$

(a) Exprimer $h_n\left(x\right)$ en fonction de $F_n\left(x\right)$ et $g_n\left(x\right)$.
(b) Déterminer, pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}\left(t\right)$ en fonction de t.
Établir, pour tout entier $n \geq 2$, la relation :

$$g_{n-1}\left(x\right) - g_n\left(x\right) = \frac{1}{n} F_{T_n}\left(x\right).$$

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $x \geq 0$, l'expression de $g_n\left(x\right)$ en fonction de x, et de $F_{T_1}\left(x\right), F_{T_2}\left(x\right), ..., F_{T_n}\left(x\right)$.
(d) Montrer que $F_{T_n}\left(x\right) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.
(e) Déduire des questions c) et d) l'existence de $E\left(T_n\right)$ et montrer que

$$E\left(T_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(17) On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\left(G_n\right)$ dé finie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$G_n = T_n - E\left(T_n\right).$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = -\ln n + E\left(T_n\right)$ et on admet *sans démonstration* que la suite $\left(\gamma_n\right)$ est convergente; on note γ sa limite.

(a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a

$$F_{G_n}\left(x\right) = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-\left(x+\gamma_n\right)}\right)^n.$$

(b) En déduire que, pour tout x réel, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{G_n}\left(x\right) = e^{-e^{-\left(x+\gamma\right)}}.$$

(c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_G\left(x\right) = e^{-e^{-\left(x+\gamma\right)}}$$

est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

(18) (a) Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable alétoire Y définie par $Y = F_X\left(X\right)$.
(b) Écrire une fonction, sous Python d'en-tête `def simul_G():` qui permet de simuler la variable aléatoire G. On supposera que la constante γ est déjà définie dans Python et stockée sous `gamma`. On utilisera la commande `rd.random()` qui permet de simuler la loi uniforme sur $]0; 1[$.

Problème 3

Notions abordées

- Séries, sommes télescopiques, *transformation d'Abel*
- Développements limités, Accroissements finis
- Partie entière
- Variables discrètes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, Variables gaussiennes

Partie I - Formule de sommation par parties et critère d'Abel

Soient (a_n) et (b_n) deux suites. On note,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

(1) Montrer, en remarquant que, pour $k \geq 2$, on a $B_k - B_{k-1} = b_k$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = a_{n+1} B_n - \sum_{k=1}^{n} B_k (a_k - a_{k+1}).$$

(2) Démontrer alors le critère d'Abel, dont l'énoncé suit : *Si la suite (a_n) tend vers 0, si la suite (B_n) est bornée et si la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge absolument, alors la série $\sum a_k b_k$ converge.*

Partie II - Semi-convergence d'une série par le critère d'Abel

On considère la série $\displaystyle\sum (-1)^n \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$.

(3) Rappeler les DL en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ et $\sqrt{1+u}$.

(4) Montrer que

$$a_n = \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad n \to +\infty$$

(5) En déduire que la série n'est pas absolument convergente.

(6) En écrivant $\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$, montrer que

$$a_n - a_{n+1} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}, \qquad n \to +\infty.$$

(7) Conclure que le critère d'Abel s'applique et que la série est bien convergente.

Partie III - Partie entière et partie décimale d'une variable gaussienne

On dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ admet une espérance si et seulement si **les deux** séries de termes généraux respectifs $nP(X = n)$ et $nP(X = -n)$ convergent. Dans ce cas,

$$E(X) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) - \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} kP(X = -k).$$

Soit T une variable aléatoire normale centrée réduite, on pose $X = \lfloor T \rfloor$ et $Y = T - X$. Dans toute cette partie, on note Φ la fonction de répartition de T. On donne

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0.6915, \qquad \text{et} \qquad \Phi(1) \simeq 0.8413.$$

(8) Préciser $X(\Omega)$ et déterminer la loi de X en fonction de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

(9) Rappeler, pour $x \in \mathbb{R}$, le lien entre $\Phi(x)$ et $\Phi(-x)$. En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad P(X = -k) = P(X = k-1).$$

(10) Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \Phi(k+1) - \Phi(k) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k/2}.$$

(11) En déduire que $E(X)$ existe.

(12) (a) Montrer, à l'aide de la Question (1) de la Partie I, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(P(X = k) - P(X = -k)) = n(\Phi(n+1) - \Phi(n)) + \Phi(0) - \Phi(n).$$

(b) En déduire la valeur de $E(X)$.

(13) Préciser $Y(\Omega)$ puis montrer que la fonction de répartition F_y de Y vérifie la relation

$$\forall y \in [0,1[, \qquad F_Y(y) = \Phi(y) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k+y) - \Phi(k-y)).$$

(14) En observant que $k - 1/2 = k - 1 + 1/2$, déterminer $F_Y\left(\frac{1}{2}\right)$.
Interpréter.

(15) Comparer $P([X = 0] \cap [Y \leq \frac{1}{2}])$ et $P(X = 0)P(Y \leq \frac{1}{2})$.
Que peut-on en déduire?

Problème 5

Pour toutes suites numérique $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$, on définit[1] la suite $u \star v = w$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}.$$

Partie I: Exemples et premiers résultats

(1) Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

$$(i)\ u_n = 2 \text{ et } v_n = 3, \qquad (ii)\ u_n = 2^n \text{ et } v_n = 3^n,, \qquad (iii)\ u_n = \frac{2^n}{n!} \text{ et } v_n = \frac{3^n}{n!}.$$

(2) Écrire un programme en Python qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$, où les suites u et v sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$

[1]Cette opération, à titre purement informatif, s'appelle le *produit de convolution (discret)* des suites u et v

(3) Dans cette question, la suite u est définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité:

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n.$$

(b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités:

$$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

(c) En déduire que les deux suites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) convergent vers 0 ainsi que la suite (w_n).

(d) Soit u' la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \star v$ est convergente et de limite nulle.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

(1) Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

(2) Soit $z = (z_n)$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}).$$

(a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

(3) Soit $a = (a_n)$ un élément de A et b la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

On définit alors la suite c par $c_0 = a_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}.$$

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n.$$

Que peut-on en déduire pour les suites $b \star c$ et a?

(c) Soit ε la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_n = c_n - \ell$$

et d la suite $b \star \varepsilon$.

En utilisant un résultat de la Partie I, montrer que la suite d converge vers 0.

(d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité

$$d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie III : Application aux variables aléatoires

(1) **Résultats préliminaires**.

(a) On considère deux distributions de probabilités $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ (que l'on associe respectivement à deux variables aléatoires X et Y supposées **indépendantes**). Montrer que la loi de $X + Y$ est donnée par $u \star v$.

(b) Retrouver alors le résultat de la question $(1) - (iii)$ de la Partie I par un choix adéquat des lois de X et de Y.

(c) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance et que celle-ci vaut

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P([Z = n]) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

(d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y}?
En déduire l'égalité

$$r(X + Y) = r(X)r(Y).$$

(e) On considère une suite (X_n) de v.a.i.i.d[2], à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

Établir l'égalité

$$r(S_q) = (r(X_1))^q.$$

(2) **Une formule sommatoire**.

(a) Montrer que la suite $u = (u_n)$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^{-n-1}$, est une distribution de probabilité. On note Z une variable aléatoire telle que $P(Z = n) = u_n$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.

(b) On suppose que (X_n) est une suite de v.a.i.i.d de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q, on désigne encore par S_q la variable

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

[2]variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées

En admettant[3], pour tout entier naturel non nul q, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1},$$

montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P([S_q = n]) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}.$$

(c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}.$$

(3) **Un exemple concret**.

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie précédemment représente le nombre de petits devant naître en 2023 d'un couple de kangourous.

Chaque petit kangourou a la même probabilité $1/2$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres.

On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2023.

(a) Préciser, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de F sachant $[Z = n]$.
(b) À l'aide de la formule obtenue en 2c, montrer que la loi de F est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P([F = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

(c) Justifier l'existence des espérances $E(Z)$ et $E(F)$ des variables aléatoires Z et F, puis vérifier l'égalité $E(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.

[3] Égalité classique que l'on rencontre dans pléthore de sujets et qu'il faut savoir démontrer