Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°2

Période du 26/09 au 07/10

Semaine du 26/09 au 30/09

Programme

- Reprise du **Devoir Surveillé n°1**.
- **Chapitre 1.**
- **TP n°1.** Tout.e étudiant.e devra écrire une fonction Python au cours de la séance, permettant la simulation d'une variable aléatoire (pas trop difficile).
- **Chapitre 2.** Familles de vecteurs. Bases.

Questions de cours

Chaque étudiant.e devrai traiter une de ces questions - choisie au hasard - au tableau. Il est donc nécessaire de les avoir préparées au préalable sous peine d'être lourdement sanctionné.

(1) Formule(s) de Taylor-Young en 0. Développements limités usuels en 0.

(2) Montrer que la fonction f est continue sur $[0;1[$, où

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2(x+\ln(1-x))}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(3) Une urne contient une boule rouge et $N-1$ boules bleues. On pioche successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au rang d'apparition de la boule rouge. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul_X(N):` qui renvoie une simulation de X.

(4) Montrer que la famille $(1,(X-1),(X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Suggestion d'exercices

(1) (*/**) Une urne contient initialement 1 boules rouge et 2 boules bleues. On procède à n tirages dans cette urne selon le protocole suivant : à chaque tirage, on pioche une boule, on note sa couleur et on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur. On note S_n le nombre de boules rouges piochées après les n tirages. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul_S(n):` qui renvoie une simulation de S_n.

(2) (**/***) On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

(i) Quelle est la loi de X_k? Donner son espérance et sa variance. Quelle commande permet de simuler X_k en Python?

On note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

(ii) Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul_T(n):` qui renvoie une simulation de T_n.

(3) (**) On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec probabilité p et *Face* avec probabilité $q = 1 - p$. On admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
On dit que le $k-$ième lancer est un *changement* s'il amène un résultat différent du $(k-1)-$ième lancer.
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on introduit la variable aléatoire X_n égale au nombre de changements survenus lors des n premiers lancers.
On introduit également la variable aléatoire Z_n égale au nombre de *Pile* obtenus lors des n premiers lancers.

(i) Reconnaître la loi de Z_n. Préciser son espérance et sa variance.
(ii) Même question avec X_2.
(iii) Écrire une fonction d'en-tête `def lancer(p):` qui simule le lancer de la pièce et renvoie la valeur 1 si on obtient *Pile* et 0 si on obtient *Face*.
(iv) Écrire ensuite une fonction d'en-tête `def simul_Z(n, p)` renvoie une simulation de Z_n.
(v) Écrire enfin une fonction d'en-tête `def simul_X(n, p)` renvoie une simulation de X_n.
(vi) Déterminer la loi de X_3.
(vii) Montrer que

$$E(X_3) = 4pq, \quad \text{et} \quad V(X_3) = 2pq(3 - 8pq).$$

(4) (*) À l'aide d'un DL judicieusement choisi, montrer que

$$(i)\ \sqrt{1+n^2} \sim n + \frac{1}{2n}; \qquad (ii)\ \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}};$$

$$(iii)\ n^{1/n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2\right);$$

$$(iv)\ \ln\left(1 + n\left(e^{1/n^2} - 1\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(5) (***) Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel $\ell \neq 0$. Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$. Est-ce toujours vrai si $\ell = 0$?

(6) (***) Soit $\alpha > 0$. Le but de l'exercice est de trouver un équivalent de u_n, où

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha.$$

(i) Quelle est la nature de la suite (u_n)?
(ii) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1} \leq (\alpha+1)n^\alpha \leq (n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}.$$

(iii) En déduire que
$$n^{\alpha+1} \leq (\alpha+1)u_n \leq (n+1)^{\alpha+1} - 1.$$

(iv) Conclure.

(7) (*) Déterminer si les familles suivantes, dans les espaces considérés, sont libres, si elles sont génératrices et si elles forment des bases de l'espace.

$$(i) \qquad \big(X+1, X^2+1, X^3+1\big) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_3[X]$$

$$(ii) \qquad ((3,2,1),(1,2,2),(0,1,1)) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3$$

$$(iii) \qquad \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$(iv) \qquad (X, X^2, 2X) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_2[X]$$

$$(v) \qquad \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

(8) (*) Montrer que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels en exhibant une famille génératrice. La famille est-elle libre?

$$(i) \qquad F = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \; M = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b \\ -a & 0 & b \\ b+c & c & 0 \end{pmatrix}, \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$(ii) \qquad G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \; \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - t & = & 0 \\ x + y & = & 0 \\ z - 2t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$(iii) \qquad J = \big\{ P \in \mathbb{R}_3[X] : \; X^2 P' - 2P = 0 \big\}$$

(9) (**) Si A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on appelle commutant de A, le sous-ensemble suivant, noté $C(A)$:
$$C(A) = \{ M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) : \; AM - MA = 0 \}$$

(a) Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.

(b) Dans cette question, $p = 2$ et $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
Déterminer une base de $C(A)$ ainsi que sa dimension.

(10) (***) Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie $m \geq n$. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + 1$. Montrer que la famille $(w_1, w_2, ..., w_n)$ est libre si et seulement si n est impair.

(11) (**/***) Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'ordre p (c'est à dire que $A^p = 0$ mais que $A^{p-1} = 0$).

(i) Montrer par l'absurde qu'une telle matrice ne peut être inversible.

(ii) Montrer que la famille
$$(I, A, A^2, ..., A^{p-1})$$
est libre.

(iii) En déduire que $p \leq n^2$

Semaine du 03/10 au 07/10

Programme

- Reprise du **Devoir Surveillé n°1**.
- **Chapitre 2.**
- **TP n°1.** Tout.e étudiant.e devra écrire une fonction Python au cours de la séance, permettant la simulation d'une variable aléatoire (pas trop difficile).
- Début du **Chapitre 3.** Suites récurrentes et convergence monotone.

Questions de cours

(1) Définition de la dimension d'un espace vectoriel. Lien entre nombre de vecteurs d'une famille, la dimension et le fait que la famille soit génératrice et/ou libre.

(2) Une urne contient une boule rouge et $N-1$ boules bleues. On pioche successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire correspondant au rang d'apparition de la boule rouge. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul_X(N):` qui renvoie une simulation de X.

(3) **Lois usuelles finies et discrètes** : loi uniforme, loi binomiale, loi géométrique. Donner les ensembles images, la loi, l'espérance, la variance. Préciser dans quel contexte on peut reconnaître ces lois. Écrire, pour les lois binomiale et géométriques, une fonction Python qui renvoie une simulation d'une variable qui suit cette loi n'utilisant que `rd.rand()` (donc sans avoir recours à `rd.binomial()` ni `rd.geometric()`).

(4) Montrer que la famille $(1,(X-1),(X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Suggestion d'exercices

(1) Exercices semaine précédente sur le Chapitre 2 et le TP 1.

(2) (*) On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=(u_n^2+2)/3$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq 3$ puis que (u_n) est croissante. Quelle est la limite de la suite?

(3) (*) Soient f la fonction définie sur $[-2,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0\geq 0$.

(a) Montrer que $f([1;3])\subset[1;3]$.
(b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution dans $[1;3]$, notée α.
(c) Montrer que, pour tout $x\in[1;3]$, on a
$$|f'(x)|\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$
(d) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a
$$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}|u_n-\alpha|.$$
(e) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n|u_0-\alpha|.$$
(f) Conclure quant à la convergence de (u_n).
(g) Écrire un programme Python qui calcule et affiche une approximation de α à ε près, où ε est entré par l'utilisateur.