Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°3

Période du 10/12 au 21/10

Semaine du 10/10 au 14/10

Programme

- **Chapitre 3.** Intégralité.

Questions de cours

Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard - au tableau. Il est donc nécessaire de les avoir préparées au préalable sous peine d'être lourdement sanctionné.

(1) Définition de la dimension d'un espace vectoriel. Lien entre nombre de vecteurs d'une famille, la dimension et le fait que la famille soit génératrice et/ou libre.

(2) **Lois usuelles finies et discrètes** : loi uniforme, loi binomiale, loi géométrique. Donner les ensembles images, la loi, l'espérance, la variance. Préciser dans quel contexte on peut reconnaître ces lois. Écrire, pour les lois binomiale et géométriques, une fonction Python qui renvoie une simulation d'une variable qui suit cette loi n'utilisant que `rd.rand()` (donc sans avoir recours à `rd.binomial()` ni `rd.geometric()`).

(3) On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/2$. Montrer que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[0;1]$, que la suite est croissante, qu'elle est convergente vers une limite ℓ que l'on précisera. Écrire une fonction en Python d'en-tête `def premier_rang(eps):` qui renvoie le premier entier n tel que $\ell - u_n <$ `eps`.

(4) Montrer que l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

Suggestion d'exercices

(1) (*) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 2)/3$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$ puis que (u_n) est croissante. Quelle est la limite de la suite?

(2) (*) Soient f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.
  (a) Montrer que $f([1;3]) \subset [1;3]$.
  (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1;3]$, notée α.
  (c) Montrer que, pour tout $x \in [1;3]$, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}|u_n - \alpha|.$$
(e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$
(f) Conclure quant à la convergence de (u_n).
(g) Écrire un programme Python qui calcule et affiche une approximation de α à ε près, où ε est entré par l'utilisateur.

(3) (**) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que
$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$
(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.
(b) Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \ln x$.
(c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
(d) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \ln x$.
(e) En déduire $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
(f) Dresser le tableau de variation de f.
(g) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant
$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = n.$$
(h) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
(i) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(4) (*) On considère, pour $n \geq 3$, l'équation
$$(E_n) \qquad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$
(a) On introduit la fonction $f_n :\ x \mapsto x^2 + x^2 + 2x - 1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?
(b) Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n \geq 3$,
$$0 < x_n < \frac{1}{2}.$$
(c) Montrer que (x_n) est croissante.
(d) En conclure que (x_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.
(e) En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.
(f) Conclure quant à la valeur de ℓ.

(5) (**/***D'après ORAL **HEC 2013**, SP) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}.$$
(a) Montrer que l'équation $f_n(x)$ admet une unique solution strictement négative, notée x_n.
(b) Montrer que (x_n) est décroissante et convergente.
(c) Déterminer la limite ℓ de (x_n).
(d) On pose $y_n = x_n - \ell$. Déterminer un équivalent de y_n.

(6) (**D'après **EDHEC 2003** - envisagé un temps pour le **DS n°2**)

(a) Montrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{e^x - 1}{x} > 0.$$

(b) Donner le développement limité d'ordre 1 en 0 de $\dfrac{e^x - 1}{x}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

(c) (i) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
(ii) Montrer que f est finalement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(d) À l'aide du développement limité en 0 à l'ordre 3 donné ci-dessous, donner le développement limité à l'ordre 2 de f en 0. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 et les positions relatives (locales) des deux courbes.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad x \to 0.$$

(e) Montrer que $f(x) \sim x$, $x \to +\infty$. Quelle est la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ correspondante?

(f) Étudier les variations de la fonction g définie par sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f. On y précisera les limites aux infinis.

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.

(b) (i) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = f(-x)$.
(ii) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(iii) Montrer alors que la suite (u_n) est décroissante.

(c) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

(d) Écrire un programme en Python permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

(9) (*/**) Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne et on note X la v.a. correspondant au plus petit des numéros obtenus.
(a) Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$.
(b) Dans la même urne, on effectue maintenant n tirages, avec remise et on note, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, N_k la v.a. correspondant au nombre de fois où on a tiré la boule numérotée k.
(i) Quelle est la loi de N_k? Rappeler son espérance et sa variance.
(ii) Soit i, j deux entiers distincts de $[\![1; n]\!]$. Quelle est la loi de $N_i + N_j$?

(10) (**/***) [Olive et Tom avec des dés]

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante:

- A joue le premier et jette deux dés: si la somme des dés est 5, il gagne et le jeu s'arrête.
- Sinon, B jette les deux dés à son tour; si la somme est 7, il gagne et le jeu s'arrête.
- Si aucun des deux n'a gagné, on recommence jusqu'à l'a victoire de A ou B.

(a) Déterminer la probabilité pour que la somme de deux dés soit égale à 5 lors du lancer des deux dés.
(b) Même question avec la somme égale à 7.
(c) Déterminer la probabilité que A gagne au $(2n+1)-$ième lancer.
(d) Déterminer la probabilité que B gagne au $(2n+2)-$ième lancer.
(e) En déduire les probabilités respectives que chacun des joueurs gagne.
(f) Soit N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que le jeu s'arrête. Montrer que N admet un espérance et la déterminer.

(11) (****) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

(a) Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2. En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.

(b) Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
(i) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.
(ii) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \frac{n-\ell+1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1).$$

(iii) En déduire que

$$E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(Z_k) + 1.$$

(c) (i) Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de terme général $v_k = E(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
(ii) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1,

$$E(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right).$$

Semaine du 17/10 au 21/10

Programme

- **Chapitre 3.** Intégralité.
- Reprise du **DS n°2**.
- **Chapitre 4.** Matrice d'une application dans une base. Noyau. Image.

Question de cours

(1) Mêmes questions que la semaines précédentes.

(2) On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer trois vecteurs V_1, V_2, V_3 tels que

$$\operatorname{Ker}(M - I) = \operatorname{Vect}(V_1), \qquad \operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{2}I\right) = \operatorname{Vect}(V_2), \qquad \operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{3}I\right) = \operatorname{Vect}(V_3).$$

(b) Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(c) En notant f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont M est la matrice dans la base canonique, déterminer la matrice de f dans la base (V_1, V_2, V_3).

(3) Énoncé du théorème du rang. Suite d'équivalences dans le cas d'un endomorphisme f sur un espace vectoriel de dimension finie E.

Suggestion d'exercices

(1) (*)Écrire les matrices (dans les bases canoniques correspondantes) des applications suivantes

$$f_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longmapsto \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ x + 4z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}$$

$$f_2 : \ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto M - 2\,{}^tM \in \mathbb{R}; \qquad f_3 : \ P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto (X-1)P' - 3P \in \mathbb{R}_3[X].$$

(2) (*) Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique

$$f(e_1) = 2(e_3 - e_2), \quad f(e_2) = 3e_1 + 5e_2 - 3e_3, \quad f(e_3) = 2(e_1 + e_2).$$

(a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$. L'endomorphisme est-il injectif? surjectif?

(c) On introduit les sous-espaces

$$E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \ f(u) = u\}, \quad \text{et} \quad E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \ f(u) = 2u\}.$$

(i) Trouver une base $\{u\}$ de E_1 et une base $\{v, w\}$ de E_2.

(ii) Montrer que $\mathcal{C} = \{u, v, w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$.

(3) (*/**) On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on introduit les vecteurs

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = w_1, \quad f(e_2) = w_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = w_3.$$

(a) Exprimer w_1, w_2 et w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3.

(b) En déduire la matrice de f dans la base canonique.

(c) Expliciter $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.

(d) Donner une base de noyau de f et une base de son image.

(e) L'application est-elle injective? surjective?

(4) (*) Déterminer le noyau, l'image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(5) (*) On considère l'application linéaire $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \to & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array}$.

(a) Écrire la matrice de g dans les bases canoniques.
(b) Déterminer une base du noyau de g.
(c) En déduire une base l'image de g.

(6) (*/**) On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{array}$$

(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Calculer $f(P)$. f est-elle injective ?
(c) Déterminer une base de l'image de f. f est-elle surjective ?
(d) Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ n'ayant pas d'antécédent par f.
(e) Déterminer une base du noyau de f.
(f) Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?

Exercice khubes

Dans tout l'exercice, $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_N[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à N.

(a) Soit a un nombre réel non nul et P un élément de $\mathbb{R}_N[X]$.
Justifier que $P(aX+1-a)$ (c'est-à-dire la fonction : $x \longmapsto P(ax+1-a)$) est un polynôme de même degré que P.

Dans toute la suite de l'exercice, pour tout réel a non nul, on note f_a l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(ax+1-a)$.

(a) Soient a et b des nombres réels non nuls.
(i) Montrer que : $f_b \circ f_a = f_{ab}$.
(ii) Démontrer que f_a est un isomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$, et préciser sa bijection réciproque, notée $(f_a)^{-1}$.
(iii) On pose : $(f_a)^0 = Id$ et, pour tout entier naturel n : $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n : $(f_a)^n = f_{a^n}$.

(b) Pour tout réel a non nul, on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.
(i) Dans cette sous question seulement, on suppose $N = 3$.
Expliciter alors la matrice M_a ainsi que son inverse.
(ii) Dans le cas général, donner le coefficient de la $(i+1)$-ième ligne et $(j+1)$-ième colonne de M_a (i et j entiers compris au sens large entre 0 et N).
(iii) n désignant un entier naturel, justifier l'égalité : $(M_a)^n = M_{a^n}$.
Ce résultat reste-t-il valable si n est un entier négatif ?

(c) Préciser l'ensemble des valeurs propres de f_a.
Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N, calculer $f_a\left((X-1)^k\right)$.
L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?