# Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

---

## Quinzaine de colle n°4

*Période du 14/11 au 25/11*

---

# Semaine du 14/11 au 18/11

### Programme

- **Chapitre 4.** Intégralité.
- Reprise du **Concours Blanc**.
- **Chapitre 5.** Séries de référence, séries télescopiques...

### Questions de cours

*Chaque étudiant.e devra traiter une de ces questions - choisie au hasard - au tableau. Il est donc nécessaire de les avoir préparées au préalable sous peine d'être lourdement sanctionné.*

(1) Énoncé du théorème du rang. Suite d'équivalences dans le cas d'un endomorphisme $f$ sur un espace vectoriel de dimension finie $E$.

(2) (Extrait du **DM 3**). Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On pioche des boules dans cette urne et, après chaque pioche, on rajoute une boule de la couleur opposée à la couleur piochée. On note $X_n$ le nombre de boules blanches dans l'urne après $n$ pioches. Déterminer les lois de $X_1$, $X_2$ et de $X_3$.

(3) Déterminer le noyau, l'image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(4) Séries usuelles. Formules, nature et somme.

### Suggestion d'exercices

(1) Écrire les matrices (dans les bases canoniques correspondantes) des applications suivantes

$$f_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longmapsto \begin{pmatrix} 5x-6z \\ 3x+y+3z \\ x+4z \end{pmatrix}, \quad f_2 : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto M - 2\,{}^tM,$$

$$f_3 : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto (X-1)P' - 3P.$$

(2) Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par son action sur la base canonique

$$f(e_1) = 2(e_3 - e_2), \quad f(e_2) = 3e_1 + 5e_2 - 3e_3, \quad f(e_3) = 2(e_1 + e_2).$$

(a) Déterminer la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique.
(b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'endomorphisme est-il injectif? surjectif?

(c) On introduit les sous-espaces

$$E_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \ f(u) = u\}, \quad \text{et} \quad E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \ f(u) = 2u\}.$$

(i) Trouver une base $(u)$ de $E_1$ et une base $(v, w)$ de $E_2$.
(ii) Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
(iii) Déterminer la matrice $B$ de $f$ dans la base $\mathcal{C}$.

(3) On note $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on introduit les vecteurs

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = w_1, \quad f(e_2) = w_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = w_3.$$

(a) Exprimer $w_1$, $w_2$ et $w_3$ en fonction de $e_1$, $e_2$ et $e_3$.
(b) En déduire la matrice de $f$ dans la base canonique.
(c) Expliciter $f(x, y, z)$ en fonction de $x, y$ et $z$.
(d) Donner une base de noyau de $f$ et une base de son image.
(e) L'application est-elle injective? surjective?

(4) (**) Calculer les sommes doubles suivantes

$$(i) \ \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i} (i-1)(n+1-j), \qquad (ii) \ \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2^{i+j}.$$

(5) (*) Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

$$\text{(i)} \ \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n} \qquad \text{(ii)} \ \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!} \qquad \text{(iii)} \ \sum_{n \geq 0} \frac{n^2+n}{n!}$$

(6) (*) Pour chacune des séries suivantes, préciser la nature et calculer la somme en cas de série convergente:

$$(i) \ \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{3 \times 4^n}, \qquad (ii) \ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad (iii) \ \sum_{n \geq 2} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$(iv) \ \sum_{n \geq 0} \frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}}, \qquad (v) \ \sum_{n \geq 0} \frac{n^2-2}{n!}, \qquad (vi) \ \sum_{n \geq 1} n \ln \left( \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right).$$

(7) (*) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$ converge.

(8) (*) Montrer que

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et en déduire la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}.$$

(9) (*/**) Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} w_n$, où $\displaystyle w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$.

(10) On définit une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$P(X=n) = a\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right),$$

où $a$ est un réel. On noter $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel $x$.

(a) Déterminer la valeur de $a$.

(b) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n+1}}\right) \sim \frac{2}{n^2}.$$

(c) $X$ admet-elle une espérance ? Une variance ?

(d) (Khubes) On considère une variable aléatoire $U$ suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1[)$ et on pose

$$Y = \left\lfloor \frac{2}{3^{1-U}-1} \right\rfloor.$$

Montrer que $X$ et $Y$ ont la même loi.

(e) Proposer une fonction Python nommée `simul_X( )` renvoyant une simulation de $X$.

# Semaine du 21/11 au 25/11

### Programme

- Reprise du **Concours Blanc**.
- **Chapitre 5**. Intégralité
- Chapitre 6. Loi conjointe.

# Questions de cours

- Toutes celles de la semaine précédente.
- Énoncés de tous les critères de comparaison.

# Suggestions d'exercices

(1) Exercices semaine précédente.

(2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

(3) **Règle de d'Alembert**. On considère une suite à termes positifs $(u_n)$ telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Alors,

- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

(a) En admettant temporairement cette règle, démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la série exponentielle de paramètre $x$.

(b) Même question avec la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

(c) Démonstration du critère. On suppose $\ell > 1$. Montrer alors que $u_n$ ne tend pas vers 0.
On suppose ensuite $\ell < 1$. Montrer qu'il existe un rang $n_0$ et un réel $q \in ]0;1[$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq q^{n-n_0}u_{n_0}$. Conclure.

(4) Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On note $X$ le plus petit numéro des 2 et $Y$ le plus grand.

(a) Compléter le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple $(X, Y)$.

| $X\backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/6 | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

(b) En déduire les loi marginales de $X$ et $Y$, puis $E(X)$ et $E(Y)$.

(c) Calculer à partir du tableau de la loi conjointe $E(XY)$.

(d) En déduire $\text{cov}(X, Y)$.

(e) On note $S$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$ sans passer par la loi de $S$.

(5) (*** A essayer de faire intégralement en 1h20). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \frac{n-1}{n^3+1}, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(a) Montrer que l'on a, pour $n \geqslant 2$ :

$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente. On notera $A$ sa somme (qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement).

(b) Donner, en fonction de $n$, un majorant très simple de $A - A_n$.

(c) À partir de quelle valeur de $n$, peut-on affirmer que $A_n$ est une valeur approchée de $A$ à moins de $10^{-4}$ près ?

(d) Pour accélérer la convergence, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - b_n.$$

(i) Calculer $b_n$ en fonction de $n$ et vérifier que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 < b_n < \frac{6}{n^5} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{6}{t^5}\mathrm{d}t$$

(ii) Vérifier que l'on a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

(iii) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on pose

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Exprimer $B_n$ en fonction de $n$ et de $A_n$, en déduire que la suite $(B_n)$ est convergente.

(iv) Soit $B$ la limite de la suite $(B_n)$. Montrer que : $B - B_n \leq \dfrac{3}{2n^4}$.

A partir de quelle valeur de $n$ peut-on affirmer que $B_n$ est une valeur approchée de $B$ à moins de $10^{-4}$ près ?

Conclure