Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°5

Période du 28/11 au 09/12

Semaine du 28/11 au 02/12

Programme

- **Chapitre 5.** Intégralité.
- **Chapitre 6.** Intégralité.
- **TP 2**. Droite de régression. Covariance et coefficient de corrélation linéaire empiriques. Commandes `pandas`.

Questions de cours

(1) Loi conjointe de (X, Y). Loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$. Lois marginales. Formules des probabilités totales.

(2) Définition et propriétés de la covariance. Lien avec l'indépendance de variables aléatoires. Variance d'une somme de variables aléatoires. Coefficient de corrélation linéaire.

Suggestion d'exercices

(1) On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.
 (a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.
 (b) Déterminer la loi du couple (X, Y)
 (c) Calculer $P(X = Y)$
 (d) Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

(2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilité et telles que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{2^i}.$$

 (a) Reconnaître les lois de X et Y.
 (b) Déterminer la loi de $Z = X + Y$ ainsi que la loi de X conditionnellement à $[Z = k], k \geq 2$.
 (c) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.
 (d) Calculer $P(X \geq 2Y)$ et $P_{[X>Y]}(X \geq 2Y)$.

(3) Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On note X le plus petit numéro des 2 et Y le plus grand.
 (a) Compléter le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple (X, Y).

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0	1/6		
2				
3				
4				

(b) En déduire les lois marginales de X et Y, puis $E(X)$ et $E(Y)$.
(c) Calculer à partir du tableau de la loi conjointe $E(XY)$.
(d) En déduire $\operatorname{cov}(X, Y)$.
(e) On note S la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$ sans passer par la loi de S.

(4) On considère des variables aléatoires $U = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $V = \max(X_1, \dots, X_n)$ où $(X_1, \dots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1; N]\!]$,
$$P(V \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n, \quad \text{puis que} \quad P(V = k) = \left(\frac{1}{N}\right)^n (k^n - (k-1)^n).$$
(b) **Dans toute la suite**, on se place dans le cas $n = 2$.
(i) Déterminer $E(V)$. On **admet** ensuite que que $V(U) = V(V) = \dfrac{(N^2-1)(2N^2+1)}{36N^2}$.
(ii) Justifier que $U + V = X_1 + X_2$. En déduire que
$$\operatorname{cov}(U, V) = V(X_1) - V(U).$$
(iii) Exprimer $\rho(U, V)$ en fonction de N.

(5) (*) Soit p un réel de $]0; 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = p, \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q.$$
Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

(6) (**EDHEC 99**) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{U}([\![1; n]\!])$.

(a) (i) Donner la loi conjointe du couple (X, Y).
(ii) Montrer que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$,
$$P(X + Y = k) = \frac{k-1}{n^2}.$$
(iii) Montrer que, pour tout $k \in [\![n+2; 2n]\!]$,
$$P(X + Y = k) = \frac{2n - k + 1}{n^2}.$$
(b) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que
$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$
(c) On introduit la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$.

(i) Que peut-on dire de $\operatorname{cov}(Z, T)$?
(ii) Montrer que T suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1; n]\!])$.
(iii) Justifier que T est indépendante de Y et de X.
(iv) Déterminer la valeur de $P(X + Y + Z = n + 1)$.

(7) (Jurassic Park) Une équipe d'archéologues travaille sur des ossements d'un même spécimen de dinosaure, retrouvés sur différents sites, au quatre coins du monde. Afin de mieux comprendre l'anatomie de ce sympathique animal, ils procèdent aux mesures de la longueur (en cm) de leur humérus et de leur fémur. Les données collectées sont enregistrées dans un fichier nommé `dino.csv`.

(a) Donner des commandes Python permettant d'importer le fichier de données sous forme d'un tableau noté `data`.

(b) On écrit les commandes suivantes dont l' exécution est reproduite ci-après. Commenter.

```
data.shape
data.columns
```

Affichage Python

```
> > >
(8,2)
Index(['Humérus (cm)', 'Fémur (cm)'], dtype='object')
```

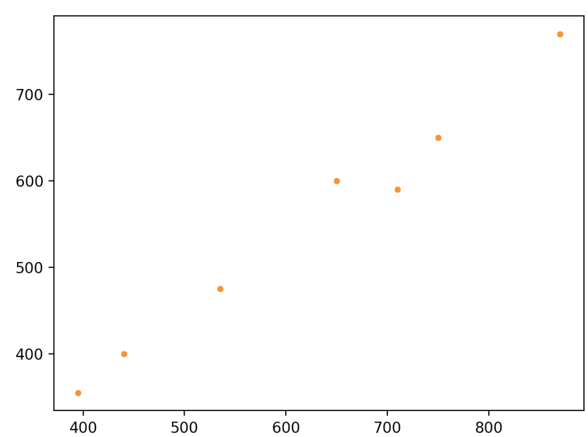
(c) On ajoute les commandes qui affiche la figure ci-après.

```
import matplotlib.pyplot as plt

X=data['Huméros (cm)']
Y=date['Fémur (cm)']

plt.grid()
plt.plot(X,Y, '.')
plt.show()
```

Affichage Python



(i) Que représente cette figure ?

(ii) Expliquer pourquoi la figure ci-dessus permet de conjecturer qu'il existe deux réels a, b tels que $ax + b$, où x est la longueur de l'humérus (en cm), est une approximation raisonnable de la longueur du fémur (en cm).

(iii) Quelle quantité pourrait-on calculer pour conforter cette approximation? Quel devrait être le résultat du calcul ? Donner une suite d'instruction en Python permettant de la calculer.

(iv) On retrouve en plein Mexique, juste à côté d'un moustique fossilisé dans de l'ambre, un fémur de ce même dinosaure de longueur 515 cm. L'humérus est manquant. Quelle devrait être sa longueur, selon ce modèle ?

Semaine du 05/12 au 09/12

Programme

- Reprise du **DS n°3**.
- Programme semaine précédente.
- **Chapitre 7**. Calcul d'intégrales (impropres) "à vue".

Questions de cours

- Toutes celles de la semaine précédente.
- Définition de la convergence d'une intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Suggestions d'exercices

(1) Exercices semaine précédente.

(2) Étudier la nature et, si possible, calculer les intégrales ci-dessous

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x^2/5}}{5}\mathrm{d}x, \qquad (ii)\ \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}, \qquad (iii)\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t-1}}.$$

(3) Après avoir justifié la convergence et calculé l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2},$$

justifier la convergence et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2(1+|x|)^2}.$$

(4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

(a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.

(b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n-1}$. En déduire la limite de v_n lorsque $n \to +\infty$.

(5) On considère la fonction $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

(a) Montrer que f est paire.

(b) Montrer que f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer la convergence, puis calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

(d) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

(6) En **admettant** que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, calculer, à l'aide d'un changement de variable affine,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$