Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°6

Période du 12/12 au 06/01

Semaines du 12/12 au 16/12 et du 03/01 au 06/01

Programme

- **Chapitre 7**. Intégralité.
- **Chapitre 8.** Eléments propres en semaine 1, intégralité du chapitre en semaine 2.
- **Graphes.** Algorithme de Dijkstra.

Questions de cours

- Critères de convergences des intégrales impropres.
- En **admettant** que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, calculer, à l'aide d'un changement de variable affine,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$
- Éléments propres d'une matrice carrée. Définitions.

Suggestions d'exercices

(1) Étudier la nature et, si possible, calculer les intégrales ci-dessous
$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x^2/5}}{5}\mathrm{d}x, \qquad (ii)\ \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}, \qquad (iii)\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t-1}}.$$

(2) Après avoir justifié la convergence et calculé l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2},$$
justifier la convergence et calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2(1+|x|)^2}.$$

(3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

(a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.

(b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n-1}$. En déduire la limite de v_n lorsque $n \to +\infty$.

(4) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

(a) Montrer que f est paire.
(b) Montrer que f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.
(c) Montrer la convergence, puis calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

(d) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

(5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite d'intégrales

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}.$$

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, I_n est une intégrale convergente.

(b) (i) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

(ii) En déduire la valeur de I_1.

(c) (i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

(ii) En déduire la limite de la suite (I_n).

(d) (i) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+1}$.
(ii) Montrer que (I_n) est décroissante.
(iii) À l'aide des deux questions précédentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2I_n \geq \frac{1}{n}.$$

(iv) Donner alors un encadrement de I_n puis un équivalent, en $+\infty$.
(v) Enfin, déterminer la nature de la série $\sum I_n$.

(6) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que 4 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_4.
(b) Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.

(7) Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés. Ces matrices sont-elles inversibles?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(8) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) En différenciant les cas $a = 0$ et $a \neq 0$, montrer que 0 est valeur propre de M_a est expliciter une base du sous-espace propre associé.
(b) Calculer $M_a(M_a^2 + (2a+1)I)$.
(c) Montrer que, si $a \geq -1/2$, alors $\mathrm{Sp}(M_a) = \{0\}$.
La matrice est-elle diagonalisable dans ce cas ?
(d) On prend $a < -1/2$. Montrer que l'équation $x^2 + (2a+1) = 0$ admet deux solutions distinctes notées λ_1 et λ_2.
(e) Montrer que la famille de matrices (M_a^2, M_a, I) est libre.
(f) Montrer par l'absurde que ni $M_a - \lambda_1 I$ ni $M_a - \lambda_2 I$ ne sont inversibles. Conclure quant au spectre de M_a. La matrice est-elle diagonalisable?

(9) Déterminer, selon la valeur de m le spectre de A.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & m \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2+m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1+m \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2+m \end{pmatrix}$$

(10) Avoir l'avoir diagonalisée, calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(11) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
(b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
(c) Vérifier que λ_1 et λ_2 sont bien des valeurs propres de A et donner une base de chacun des sous-espaces propres associés.
(d) Donner une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de X_1 et la première de X_3 étant nulles. Former la matrice de passage P de la base canonique vers cette base. Que vaut $P^{-1}AP$?
(e) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

(12) Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra le plus cours chemin du sommet s_1 au sommet s_7 dans le graphe ci-dessous.