Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°7

Période du 09/01 au 20/01

Semaine du 09/01 au 13/01

Programme

- **Chapitre 8.** Intégralité. Une réduction d'une matrice diagonalisable pour tou.te.s et une application (système de suites récurrentes par exemple).
- **Chapitre 9.** Montrer qu'une v.a est à densité à partir de sa fonction de répartition; montrer qu'une fonction donnée est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition de la v.a associée. Calcul d'espérance, de variance.

Suggestions d'exercices

(1) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

  (a) Montrer que 4 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_4.
  (b) Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.

(2) Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés. Ces matrices sont-elles inversibles?

  (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ -a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  (a) En différenciant les cas $a = 0$ et $a \neq 0$, montrer que 0 est valeur propre de M_a est expliciter une base du sous-espace propre associé.
  (b) Calculer $M_a(M_a^2 + (2a+1)I)$.
  (c) Montrer que, si $a \geq -1/2$, alors $\mathrm{Sp}(M_a) = \{0\}$.
  La matrice est-elle diagonalisable dans ce cas ?
  (d) On prend $a < -1/2$. Montrer que l'équation $x^2 + (2a+1) = 0$ admet deux solutions distinctes notées λ_1 et λ_2.
  (e) Montrer que la famille de matrices (M_a^2, M_a, I) est libre.
  (f) Montrer par l'absurde que ni $M_a - \lambda_1 I$ ni $M_a - \lambda_2 I$ ne sont inversibles. Conclure quant au spectre de M_a. La matrice est-elle diagonalisable?

(4) Avoir l'avoir diagonalisée, calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(5) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
(b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
(c) Vérifier que λ_1 et λ_2 sont bien des valeurs propres de A et donner une base de chacun des sous-espaces propres associés.
(d) Donner une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de X_1 et la première de X_3 étant nulles. Former la matrice de passage P de la base canonique vers cette base. Que vaut $P^{-1}AP$?
(e) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

(6) Dessiner une fonction f telle que
- $f(3) = 2$;
- f est affine par morceaux mais f continue partout sur $\mathbb{R}$
- f densité de probabilité

(7) Montrer que la fonction f ci-dessous (que l'on commencera par dessiner) est une densité de probabilité puis déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire associée à cette densité.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } \ -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(8) (**EML 2015**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est une densité de probabilité.
On note T_n une variable aléatoire admettant f_n pour densité.
(b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^3 f_n(x)$.
(c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.
(d) Déterminer l'espérance $E(T_1)$ de T_1.
(e) (i) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x).$$

(ii) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

(9) Vérifier que la fonction f suivante est une densité de probabilité. En notant X une variable aléatoire ayant f pour densité, expliciter la fonction de répartition F_X de X. La variable X

admet-elle une espérance ?

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{3}, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{5}{6(x+1)^2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(10) On considère la fonction φ définie, pour $x > 0$, par $\varphi(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

(a) (i) Étudier la fonction φ. On représentera le tableau de variations incluant les limites au bord de l'ensemble de définition.

(ii) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ admet une unique solution α et que $1/3 < \alpha < 1/2$.

(b) On introduit maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{1}{x^2(x+1)}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(i) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

(ii) Montrer que f est une densité de probabilité. On note X une v.a ayant f pour densité. Montrer que X admet une espérance. Qu'en est-il de la variance?

(iii) Montrer que, pour tout $x > \alpha$,

$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}.$$

(iv) En déduire, en fonction de α, la valeur de $E(X)$.

Semaine du 16/01 au 20/01

Programme

- **Chapitre 9.** Intégralité.
- **Chapitre 10.** Révisions sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

Questions de cours

- Lois usuelles : donner l'expression des fonctions de densité et de répartition puis la valeur de l'espérance et de la variance des lois uniformes sur $[a, b]$, exponentielles de paramètre λ et normale de paramètre m et σ^2.

- Dessiner une courbe gaussienne. Expliquer les propriétés de symétrie et retrouver les valeurs de $P(X \geq a)$, $P(|X| \leq a)$ en fonction de $\Phi(a)$, où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

- Soient $X_1, ...X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[0; 1]$. Déterminer la fonction de répartition de $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Justifier que M_n est une variable à densité, exhiber une densité. Montrer que M_n admet une espérance et la calculer.

- Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$ et $V = -\ln(1 - U)$. Montrer que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Suggestions d'exercices

(1) Exercices semaine précédente pour les densités.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n, & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Vérifier que f_n est une densité de probabilité. On note X_n une variable aléatoire ayant f_n pour densité. Exprimer la fonction de répartition F_n de X_n.

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = nX_n$.
Calculer la fonction de répartition FGn de la variable Y_n.

(3) Montrer que, pour tout $a > 0$ et pour tous réels $b, c \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(ax^2 + bx + c))\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

(4) Soit Y une variable aléatoire de densité f vérifiant $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$ et admettant une espérance.

(a) Montrer que, pour tout $A > 0$, on a

$$\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t = -AP(Y > A) + \int_0^A P(Y > t)\mathrm{d}t$$

(b) Montrer que $AP(Y > A)$ tend vers 0 lorsque $A \to +\infty$ (on commencera par écrire cette quantité à l'aide d'une intégrale, que l'on encadrera à l'aide d'une autre intégrale).

(c) Conclure que

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} P(Y > t)\mathrm{d}t$$

(5) On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$P(X = n) = a \ln\left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n+1}}\right),$$

où a est un réel. On noter $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\ln\left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n+1}}\right) \sim \frac{2}{n^2}.$$

(c) X admet-elle une espérance ? Une variance ?

(d) On considère une variable aléatoire U suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1[)$ et on pose

$$Y = \left\lfloor \frac{2}{3^{1-U} - 1} \right\rfloor.$$

Montrer que X et Y ont la même loi.

(e) Proposer une fonction Python nommée `simul_X` renvoyant une simulation de X.

(6) Soient λ un réel strictement supérieur à 2 et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

(a) Donner l'expression de la fonction de répartition de X et préciser son espérance et sa variance.

(b) Montrer que $E\left(\mathrm{e}^X\right)$ et $E\left(\mathrm{e}^{2X}\right)$ existent et valent respectivement $\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ et $\dfrac{\lambda}{\lambda-2}$.

On pose $Y = \mathrm{e}^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire et on note F_Y sa fonction de répartition.

(c) (i) Justifier que $Y(\Omega) = [1; +\infty[$.
(ii) Déterminer $F_Y(t)$ pour $t < 1$ puis montrer que $F_Y(t) = 1 - t^{-\lambda}$ pour $t \geq 1$.
(iii) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

(d) (i) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $E\left(Y^k\right)$ existe si et seulement si $k < \lambda$.
Justifier alors que Y admet une espérance et une variance.
(ii) Calculer les valeurs de l'espérance et de la variance de Y.

(7) On considère deux variables X et Y indépendantes telles que

$$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$$

et $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.
Quelle est la loi de $Z = XY$?

(8) On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que la fonction F ci-dessous est la fonction de répartition d'une variable à densité

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(9) On piochera des équations différentielles dans le poly de cours, qui n'auront pas été traitées en classe.