Math ECG 2. 2022-2023

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Quinzaine de colle n°8

Période du 23/01 au 03/02

Semaine du 23/01 au 27/01

Programme

- **Chapitre 9.** Intégralité.
- **Chapitre 10.** Intégralité.

Questions de cours

- Forme des solutions des équations différentielles homogènes linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2.
- Forme des solutions d'un système différentiel $AX = X'$ lorsque A est diagonalisable.

Suggestions d'exercices

(1) Soient λ un réel strictement supérieur à 2 et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

(a) Donner l'expression de la fonction de répartition de X et préciser son espérance et sa variance.

(b) Montrer que $E\left(\mathrm{e}^X\right)$ et $E\left(\mathrm{e}^{2X}\right)$ existent et valent respectivement $\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ et $\dfrac{\lambda}{\lambda-2}$.

On pose $Y = \mathrm{e}^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire et on note F_Y sa fonction de répartition.

(c) (i) Justifier que $Y(\Omega) = [1; +\infty[$.
(ii) Déterminer $F_Y(t)$ pour $t < 1$ puis montrer que $F_Y(t) = 1 - t^{-\lambda}$ pour $t \geq 1$.
(iii) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

(d) (i) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $E\left(Y^k\right)$ existe si et seulement si $k < \lambda$.
Justifier alors que Y admet une espérance et une variance.
(ii) Calculer les valeurs de l'espérance et de la variance de Y.

(2) On considère deux variables X et Y indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1;1\})$. Quelle est la loi de $Z = XY$?

(3) On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que la fonction F ci-dessous est la fonction de répartition d'une variable à densité

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(4) On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$$

(a) Résoudre le système (S).
(b) Trouver les états d'équilibre du système (S).
(c) Existe-t-il des trajectoires convergentes ? Si oui, en donner une.
(d) Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.

(5) On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}$$

(a) Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.
(b) Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.
(c) Résoudre le système (S).
(d) Expliciter une trajectoire non constante qui converge vers l'état d'équilibre $(2,-2)$.

(6) On considère le système différentiel linéaire

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = x + 4y - 4z \\ y' = 3x + 2y - 4z \\ z' = 3x - 3y + z \end{cases}$$

On pose, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution de (S) vérifiant : $X(0) = X_0$.
(b) Résoudre le système (S).
(c) (i) Déterminer la trajectoire associée à la solution évoquée en question 6a.
(ii) Cette trajectoire est-elle convergente ?

(7) (*Système avec matrice non diagonalisable*). On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

(a) (i) Déterminer une matrice A telle que le système soit équivalent à $X'(t) = AX(t)$. Déterminer le spectre de A.
(ii) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

(b) (i) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
(ii) Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T que l'on explicitera.

(c) On note $Y = P^{-1}X$.

(i) En notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ prouver que : $Y' = P^{-1}X'$.
(ii) En déduire que : $X' = AX \iff Y' = TY$.

(d) (i) Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$.
(ii) En déduire les solutions du système $Y' = TY$.
(iii) Conclure.

(8) (*Équation non linéaire : équation logistique.*) Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

$$(E) \qquad y' = ay - aby^2$$

(a) Déterminer les équilibres de l'équation logistique.
(b) Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
(i) On pose $z = \dfrac{1}{f}$.
Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geq 0$,
$$z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}.$$
(ii) En déduire que, pour tout $t \geq 0$,
$$f(t) = \frac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}.$$
(c) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

Semaine du 30/01 au 03/02

Programme

- Reprise du **DS n°4** du 27/01
- Chapitres 9, 10 et 11 en intégralité.

Questions (Exercices) de cours

- Définitions de Gradient, points critiques et matrice hessienne d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Montrer rigoureusement que la fonction
$$f : (x,y) \mapsto \frac{\ln(1+(x+y)^2)}{1+xy}$$
est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

- Après avoir justifié qu'elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, déterminer les points critiques de la fonction
$$f : (x,y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$$

Sélection d'exercices

(1) Montrer que les fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et former leur matrice hessienne en un point quelconque (x,y).

$$(i)\ (x,y) \mapsto x^4y^2 + 3x^2y - 2x + 1, \qquad (ii)\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+1},$$
$$(iii)\ (x,y) \mapsto \ln(x)e^y, \qquad (iv)\ (x,y) \mapsto \frac{x+y}{e^y+1}$$
$$(v)\ (x,y) \mapsto x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4 - 1, \qquad (vi)\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$$

(2) Déterminer le **domaine de définition** et le représenter graphiquement pour chaque fonction suivante

$$(i)\ f_1 :\ (x,y) \mapsto \frac{xe^y}{y} + \ln(x), \qquad (ii)\ f_2\ :\ (x,y) \mapsto \sqrt{2-x-y} + \sqrt{xy}$$

(3) (a) On considére la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

(i) Étudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
(ii) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $]0, 1/e[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

(b) On considére la fonction de deux variables réelles f définie par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2).$$

(i) Déterminer le seul point critique de f.
(ii) Vérifier que f présente un minimum local, noté m, en ce point.
(iii) Montrer que $m = -\alpha(\alpha+1)$

(4) (D'après **EDHEC 2021**) Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(a) Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) (i) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
(ii) Déterminer les points critiques de f.
(c) (i) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
(ii) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
(d) Cet extremum est-il global?

(5) Soit f la fonction définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

(a) (i) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(ii) Calculer les dérivées partielles premières de f.
(iii) En déduire que le seul point critique de f est $A = (1/6; 1/6)$.

(b) (i) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
(ii) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

(c) (i) Développer

$$2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2.$$

(ii) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

(d) On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

(i) Utiliser la Question (3) pour établir que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(x,y) \geq -\frac{1}{6}.$$

(ii) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.