Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°1 - sujet A

Mercredi 8 Novembre
Durée : 4 heures

Dans tout le sujet, on suppose déjà importées sous leur alias habituels les bibliothèques Python usuelles.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie 1 - Étude d'une fonction

(1) (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
(c) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.
(d) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

(2) (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :
$$u : x \mapsto (1 - x)\, e^x - 1$$
(b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.
(c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau de variations de f.
(d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie 2 - Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

(3) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite_u(n):` qui renvoie la valeur de u_n.

(4) Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

(5) (a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.
(b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.
(c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
(d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

(6) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

(7) Conclure que la suite (u_n) converge vers α.

(8) Écrire un programme en `Python` qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

(9) Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire l'appel correspondant en `Python`

Partie 3 - Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t.$$

(10) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(11) (a) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq G(x) \leq xf(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.

(b) Montrer : $\forall x \in]-\infty, 0],\ G(x) \leq xf(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.

(12) Dresser le tableau de variations de G. (On n'essaiera pas de calculer $G(\ln(3))$.)

Exercice 2

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0, 1[$ et on pose : $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) \ = \ q^k\, p \ = \ (1 - p)^k\, p.$$

Partie 1

(1) (a) Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
(b) En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $E(X)$ et $V(X)$.

(2) Compléter la fonction `Python` suivante afin que, prenant en entrée le réel p, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```
def simul_X(p):
    Y=...........
    while ............. :
        Y+=1
    return Y-1
```

Partie 2

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si k est égal à 0, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit k variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la *Partie 1*, et reverse au joueur $(X_1 + \cdots + X_k)$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.
Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.
On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.
On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi : $Z_0 = 1$.
On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

(3) Compléter la fonction `Python` suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n.
Cette fonction devra utiliser la fonction `simul_X`.

```
def simul_Z(n,p):
    Z=1
    for i in range(1, n+1):
        s=0
        for j in range(1, Z+1):
            .....
        Z=....
    return Z
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = P(Z_n = 0)$.
On note également R l'événement : "le joueur finit par ne plus avoir de jeton".

(4) (a) Préciser les valeurs de u_0 et de u_1.
(b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$.
En déduire que la suite (u_n) est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

(5) Justifier : $P(R) = \ell$.

(6) (a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $P_{[Z_1=k]}(Z_2=0)=(u_1)^k$.

On **admet** que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $P_{[Z_1=k]}(Z_{n+1}=0)=(u_n)^k$.

(b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}=\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k)(u_n)^k=\frac{p}{1-qu_n}.$$

(7) (a) Montrer que ℓ vérifie : $(\ell-1)(q\,\ell-p)=0$.

(b) On suppose : $p \geq \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $P(R)=1$.

(c) On suppose : $p < \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \dfrac{p}{q}\right]$. En déduire : $P(R)<1$.

(d) Expliquer pourquoi le casino préfèrera choisir p dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Partie 3

On suppose à présent que $p \geq \dfrac{1}{2}$.

Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino, et ainsi dépense plus d'argent dans ses consommations au bar.

On note T la variable aléatoire qui prend la valeur du nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque celui-ci, pour la première fois, n'a plus de jetons.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1-u_n$.

(9) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = P(T \leq n)$ puis que $P(T=n)=v_{n-1}-v_n$.

(10) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} nP(T=n)=\sum_{n=0}^{N} v_n - Nv_N$.

(11) On suppose dans cette question que $p=\dfrac{1}{2}$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

(b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

(12) On suppose maintenant que $p > \dfrac{1}{2}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_n=\dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1}=\dfrac{q}{p}w_n$.

(b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

(c) Montrer que T admet une espérance et que $E(T) \leq \dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$.

(13) Quelle(s) valeur(s) de p recommanderiez-vous au casino ?

Exercice 3

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$N^{k-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad N^k = 0.$$

Si N est nilpotente, on dit que p est l'ordre de nilpotence de N si

$$p = \min\{k \in \mathbb{N},\ A^k = 0\}.$$

(1) Déterminer, en justifiant rigoureusement, le spectre d'une matrice N nilpotente d'ordre $p > 1$. Est-elle diagonalisable ?

Soit A une matrice carrée de taille n, on dit que le couple (Δ, N) est une *décomposition de Dunford* de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est un matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \ \text{ et } \ A = N + \Delta \end{cases}$$

(2) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) (a) Déterminer les valeurs propres de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(4) On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
(b) Justifier que la matrice Δ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}\Delta P = D$.

(5) (a) Établir que N est une matrice nilpotente.
(b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
(c) En utilisant une formule bien connue, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ, de N et de n.
(d) Établir que, pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$.
(e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n.