Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

## Concours Blanc n°1 - sujet A

*Solution*

# Exercice 1

*Cet exercice provient du sujet* ***EML 2009****. On en trouvera une solution parfaitement rédigée ici, proposée par Tom Dutilleul pour son DS 1 (Exercice 2).*

# Exercice 2

*Cet exercice provient du sujet* ***EML 2022****. On en trouvera une solution, proposée par Romain Meurant, ici*. On propose néanmoins une version Python des programmes informatique ci-dessous.

### Partie 1

(1) (a) On simule une géométrique de paramètre $p$ qu'on nomme $Y$ et on renvoie $Y-1$.

```python
def simul_X(p):
    Y=1
    while rd.random()>p :
        Y+=1
    return Y-1
```

### Partie 2

(3)

```python
def simul_Z(n,p):
    Z=1
    for i in range(1, n+1): # i = numero de la partie
        s=0 # s = nombre de jetons gagnés partie i
        for j in range(1, Z+1): # j = numero du jeton joué
            s=s+simul_X(p)
        Z=s
    return Z
```

# Exercice 3

*Cet exercice provient du sujet* ***ECRICOME 2011***.

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel $k$ non nul tel que :

$$N^{k-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad N^k = 0.$$

Si $N$ est nilpotente, on dit que $p$ est l'ordre de nilpotence de $N$ si

$$p = \min\{k \in \mathbb{N},\ A^k = 0\}.$$

(1) Si $N$ est nilpotente d'ordre $p$, alors $X^p$ est un polynôme annulateur de $N$. Ce polynôme ayant pour unique racine 0, c'est la seule valeur propre possible de $N$.
Si 0 n'était pas valeur propre de $N$, alors $N$ serait inversible et on aurait l'existence d'une matrice $N^{-1}$ telle que $N^{-1}N = I$. En multipliant, dans la relation $N^p = 0$, par $N^{-1}$, on obtiendrait $N^{p-1} = 0$, ce qui n'est pas vrai. Donc $N$ n'est pas inversible et 0 est bien l'unique valeur propre de $N$.
Si $N$ était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale (de même spectre que $N$) donc nulle. Seule la matrice nulle est semblable à la matrice nulle. Donc $N = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc $N$ n'est pas diagonalisable.

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$, on dit que le couple $(\Delta, N)$ est une *décomposition de Dunford* de $A$ lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est un matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \ \text{ et } \ A = N + \Delta \end{cases}$$

(2) Vérifions que les conditions définies dans le sujet sont vérifiées:

- $\Delta$ est une matrice diagonale, donc en particulier $\Delta$ est diagonalisable ($\Delta = PDP^{-1}$ avec $P = I_2$ inversible et $D = I_2$ diagonale).
- $N \neq 0_2$ et $N^2 = 0_2$, donc $N$ est nilpotente.
- $\Delta N = I_2 N = N = N I_2 = N\Delta$ et $A = N + \Delta$.

Conclusion : $(\Delta, N)$ est une décomposition de Dunford de $A$.

(3) (a) On sait que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Appliquons la méthode de Gauss-Jordan :

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

devient par $L_2 \leftrightarrow L_1$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

devient par $L_2 \leftarrow 2L_2 + (3-\lambda)L_1$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & (2\lambda+4) \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = T_\lambda$$

On en déduit les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\iff A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff T_\lambda \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \text{ ou } 1-\lambda = 0 \qquad (\text{car } T_\lambda \text{ est triangulaire}) \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de $A$ sont donc les réels 1 et 2.

(b) Déterminons le sous-espace propre $E_1$ associé à la valeur propre 1.

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff AX = X \\ &\iff (A - I_3)X = 0_3 \\ &\iff T_1 X = 0_3 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - y + 2z &=& 0 \\ 6z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& -2x \\ z &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier $E_1$ est de dimension 1. On obtient de même le sous-espace propre $E_2$ associé à la valeur propre 2.

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier $E_2$ est de dimension 1. Au final, $A$ est une matrice carrée d'ordre 3 admettant pour seules valeurs propres 1 et 2.

Supposons que $A$ soit diagonalisable. On pourrait alors trouver une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de trois vecteurs propres de $A$. Comme on a seulement deux valeurs propres, on aurait forcément deux de ces vecteurs propres associés à la même valeur propre (et donc dans le même sous-espace propre). Mais ces deux vecteurs propres forment une famille libre, ce qui est contradictoire avec le fait que chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Donc $A$ n'est pas diagonalisable.

(4) (a) Sans difficulté :

$$\Delta X_1 = 2X_1, \qquad \Delta X_2 = X_2, \qquad \Delta X_3 = X_3.$$

(b) La famille $(X_1, X_2, X_3)$ est une famille de vecteurs propres de $\Delta$. Étudions sa liberté. Pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1 X_2 + \lambda X_2 + \lambda_3 X_3 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille $(X_1, X_2, X_3)$ est donc libre.
Comme elle est formée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, la famille $(X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de $\Delta$ associés respectivement aux valeurs propres 2,1,1.

Ainsi $\Delta$ est diagonalisable et en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice $P$ est inversible et on a :

$$\Delta = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1}.$$

(c) Un pivot de Gauss simultané donne sans difficulté :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) (a) $N \neq 0_3$ et $N^2 = 0_3$, donc $N$ est nilpotente.

(b)
- $\Delta$ est diagonalisable d'après 4.(b).
- $N$ est nilpotente d'après 5.(a).
- On calcule que $\Delta N = N\Delta = N$.

Comme $A = \Delta + N$, $(\Delta, N)$ est bien une décomposition de Dunford de $A$.

(c) Comme les matrices $N$ et $\Delta$ commutent, on peut appliquer la formule de binôme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (N + \Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k}$$

Comme $N^2 = 0_3$, on a, pour tout entier $k \geq 2$,

$$N^k = N^2 N^{k-2} = 0_3,$$

ce qui permet de voir qu'il reste donc dans la somme précédente les deux premiers termes

$$A^n = \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1},$$

ce qu'on voulait.

(d) Notons $\mathcal{P}_k$ la proposition : $\Delta^k N = N$.

- <u>initialisation</u>: On a déjà vu en 4.(b) que $\Delta N = N$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- <u>hérédité</u>: Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un $k \geq 1$ fixé. Par hypothèse de récurrence, on a $\Delta^k N = N$. En multipliant à gauche par $\Delta$, il vient
$$\Delta^{k+1} N = \Delta N = N$$
d'après l'initialisation. Il suit que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et la récurrence est terminée. (Notons que le résultat est encore vrai pour $k = 0$.)

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 5.(c) et 5.(d), on a $A^n = \Delta^n + nN$. Vérifions que $(\Delta^n, nN)$ est une décomposition de Dunford.

- $\Delta = PDP^{-1}$ d'après 4.(b).
Par une récurrence immédiate et ultra-classique vue environ dix mille cinq cents fois, sur $n$, on obtient que $\Delta^n = PD^nP^{-1}$ avec
$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
diagonale. Donc la matrice $\Delta^n$ est bien diagonalisable. Cela commence bien et ça fait plaisir.

- $nN \neq 0_3$ et $(nN)^2 = n^2N^2 = n^2 0_3 = 0_3$ (d'après 5.(a))
Donc la matrice $nN$ est nilpotente. On est sur la bonne voie.

- Par 5.(d), on a : $\Delta^n(nN) = n\Delta^n N = nN$.
Comme $N\Delta = N$, on peut montrer de façon analogue à 5.(d) que : $\forall k \geq 0, \quad N\Delta^k = N$. Ainsi : $(nN)\Delta^n = nN = \Delta^n(nN)$ et ça commute et c'est tout bon. On sort le champagne.

<u>Conclusion</u> : $(\Delta^n, nN)$ est une décomposition de Dunford de $A^n$.