Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°1 - Sujet B

Mercredi 8 Novembre
Durée : 4 heures

Dans tout le sujet, on suppose déjà importées sous leur alias habituels les bibliothèques Python usuelles.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

Soient (a_n) et (b_n) deux suites. On note,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

(1) Montrer, en remarquant que, pour $k \geq 2$, on a $B_k - B_{k-1} = b_k$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = a_{n+1}B_n - \sum_{k=1}^{n} B_k(a_{k+1} - a_k).$$

(2) Démontrer alors le résultat suivant, nommé *Critère d'Abel*[1], dont l'énoncé suit :

Critère d'Abel

Si la suite (a_n) tend vers 0, si la suite (B_n) est bornée et si la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge absolument, alors la série $\sum a_k b_k$ converge.

On considère la série $\sum(-1)^n\sqrt{n}\ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)$.

(3) Rappeler les DL en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ et $\sqrt{1+u}$.

(4) Montrer que

$$a_n \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{n}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad n \to +\infty$$

(5) En déduire que la série n'est pas absolument convergente.

[1] d'après le mathématicien norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829)

(6) En écrivant $\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$, montrer que

$$a_n - a_{n+1} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}, \qquad n \to +\infty.$$

(7) Conclure que le critère d'Abel s'applique et que la série est bien convergente.

Exercice 2

Une matrice carrée non nulle $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

(1) Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente, alors $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux nuls.
On introduit les quantités $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

(2) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

(3) (a) Montrer que si $\gamma(M) = \delta(M) = 0$, alors M est nilpotente.
   (b) Réciproquement, on suppose que M est nilpotente.
      (i) Déterminer, à partir de la Question (2), un polynôme annulateur de degré 2 de M. En déduire que $\delta(M) = 0$.
      (ii) Montrer que, si $\gamma(M) \neq 0$, alors $M^2 - \gamma(M)I$ est inversible. Obtenir, toujours à l'aide de la Question (2) une contradiction.
      (iii) Conclure.

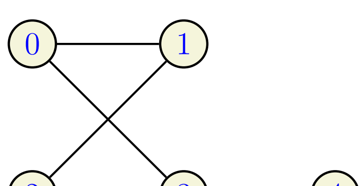
(4) Écrire, en Python, une fonction d'en-tête `def test_nilpotente(M):` qui prend en argument une matrice M de taille 3 dont les coefficients diagonaux sont nuls et qui renvoie 1 ou 0 selon que la matrice M est nilpotente ou non.

(5) On suppose que a, b et d sont égaux à 1. Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

(6) À quelle question cette exercice permet-il de répondre ?

Exercice 3

On considère le graphe G suivant dont on note A la matrice d'adjacence.



(1) Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.

(2) (a) Par lecture du graphe, donner (en listant les sommets) les chaînes de longueurs 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

(b) (Python). On suppose que l'on a saisi la matrice A. Compléter (en expliquant) ces instructions pour qu'elles permettent d'afficher le nombre trouvé à la question précédente.

```
B=al.matrix_power(A,.....)
n=B[ .... ]
print(n)
```

On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G, dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la ligne i est le degré du sommet de numéro i (avec $i \in [\![1,5]\!]$).
On définit également la matrice L, appelée matrice laplacienne de G, en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de L et on suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2, \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$.

(3) (a) Déterminer la matrice D.

(b) Vérifier qu'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

(4) On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de G sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) On identifie une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la quantité ${}^tXLX$?

(b) Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de a, b, c, d et e. En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

(c) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

(5) (a) À l'aide de la Question ($3b$), montrer l'équivalence

$$LX = 0 \Longleftrightarrow X \in \text{Vect}(U).$$

(b) Conclure que $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont des réels strictement positifs.

Problème

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

Partie 1 - Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une *relation de Panjer* s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$P(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N=k-1).$$

(1) On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

(a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(N=k) = \frac{b^k}{k!}\, P(N=0).$$

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)$.
En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

(2) On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

(a) Montrer :

$$\forall k \geq 2, \quad P(N=k) = 0.$$

(b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

(3) On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

(a) Montrer :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z=k-1).$$

(b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

(4) On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

(a) Calculer $P(N=1)$. En déduire : $a + b \geq 0$.
(b) Montrer, pour tout entier $m \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k\, P(N=k) \;=\; a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\, P(N=k) + b \sum_{k=0}^{m-1} P(N=k)/$$

(c) En déduire que $\left((1-a) \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\, P(N=k) \right)_{m \geq 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.

Préciser alors la valeur de $E(N)$ en fonction de a et b.
(d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$E(N^2) \;=\; \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

(e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $V(N)$ en fonction de a et b.
(f) Montrer que $E(N) = V(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie 2 - Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = P(N = k),$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(5) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la série $\sum_{n \geq 0} p_n \, x^n$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G(x) \; = \; \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \, x^k \; = \; \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) \, x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$.

On pose : $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$. On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = p_0 \, (1 - a\, x)^{\alpha}$$

(6) Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad f^{(k)}(x) \; = \; k! \times p_k \, (1 - a\, x)^{\alpha - k}.$$

(7) Soit $x \in [0, 1]$.

(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) \; = \; \sum_{k=0}^{n} p_k \, x^k + (n+1) \, p_{n+1} \int_0^x (1 - a\, t)^{\alpha - n - 1} \, (x - t)^n \mathrm{d}t.$$

(b) Vérifier, pour tout $t \in [0, x]$: $\dfrac{x - t}{1 - at} \leq 1$.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \; \leq \; \int_0^x (1 - at)^{\alpha - n - 1} \, (x - t)^n \mathrm{d}t \; \leq \; \int_0^x (1 - at)^{\alpha - 1} \mathrm{d}t.$$

(c) En déduire :

$$G(x) \; = \; p_0 \, (1 - ax)^{\alpha}$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier : $G'(1) = E(N)$.

Partie 3 - Formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la Question (4) de la **Partie 1**.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S \; = \; \begin{cases} 0, & \text{si } [N = 0] \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k, & \text{si } [N \geq 1] \end{cases}$$

(8) Calculer $P(S = 0)$ lorsque $a \in \,]0, 1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

(9) (a) Calculer $P(S = 0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

(b) On considère la fonction Python suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
def simul_X(n) :
    y=0
    for i in range(1, n+1):
        if rd.random() <1/2 :
            y=y+1
    return y
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simul_X` ?
Préciser ses paramètres.

(c) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre θ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simul_X`.
Recopier et compléter la fonction Python suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
def simul_S(theta, n):
    N=rd.poisson(theta)
    ........
    ........
    ........
    ........
```

(10) Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = P(N = k)$$

et on notera également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = P(X_1 = k).$$

On considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on **admet** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, P(S_n = k - j) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad P(S = k - j) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, P(S_n = k - j)$$

(b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, P(S = k - j) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, P(S_{n+1} = k).$$

(c) Justifier :

$$P(S = k) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, P(S_{n+1} = k).$$

(d) En déduire finalement :

$$P(S = k) \ = \ \frac{1}{1 - a\, q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, P(S = k - j).$$