Concours Blanc n°1 - Sujet B

Solution

Exercice 1

Soient (a_n) et (b_n) deux suites. On note,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

(1) L'idée principale de cette question est d'observer que

$$b_k = B_k - B_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

et que $b_1 = B_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k \qquad \text{(changement d'indice)} \\ &= a_{n+1} B_n - \sum_{k=1}^{n} B_k (a_{k+1} - a_k), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(2) Supposons donc que
- La suite (a_n) tend vers 0;
- la suite (B_n) est bornée;
- la série $\sum (a_{k+1} - a_k)$ converge absolument.

On peut alors déduire que

- la suite $(a_n B_n)$ converge vers 0. En effet, comme (B_n) est bornée, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|B_n| \leq M$. Il suit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$-M a_n \leq a_n B_n \leq M a_n$$

et par le théorème des gendarmes, $a_n B_n$ tend bien vers 0;

- La série $\sum B_k(a_k - a_{k+1})$ converge (absolument). En effet,

$$|B_k(a_k - a_{k+1})| \leq M|a_{k+1} - a_k|$$

et comme par hypothèse la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge absolument, le critère de comparaison pour les séries à termes positifs permet d'affirmer que la série $\sum B_k(a_k - a_{k+1})$ converge absolument et donc converge.

Ainsi, la somme partielle S_n admet une limite finie, ce qui est la définition d'une série convergente.

On considère la série $\sum(-1)^n \sqrt{n} \ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)$.

(3) On énonce les formules des DL en 0, à l'ordre 2, qu'on connait sur le bout des doigts:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

(4) On commence par réécrire la quantité dans le log.

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \\
&= \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{2\sqrt{n}}{n} + o\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right) \\
&\sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

(5) Comme

$$\left|(-1)^n\sqrt{n}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)\right| = a_n \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \to +\infty,$$

le critère d'équivalence (en comparaison à une série de Riemann divergente) permet d'affirmer que la série ne converge pas absolument.

(6) On utilise les DL rappelés ci-dessus.

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1+\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{2}{(n+1)} - \frac{2}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2n^2 - 2(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{2-4n}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

(7) On vérifie que les hypothèses du critères sont bien satisfaites:

- Comme $a_n \sim 2/\sqrt{n}$, on a bien que $a_n \to 0$;
- La suite (B_n) est bornée. En effet
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$
Donc $|B_n| \leq 1$;
- La série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge absolument. En effet,
$$|a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1} \sim \frac{1}{k\sqrt{k}}$$
et par équivalence avec une série de Riemann convergente, on a bien la convergence.

Tous les critères sont satisfaits, la série considérée converge.

Exercice 2

Une matrice carrée non nulle $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

(1) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Il existe donc $p \neq 0$ tel que $M^p = 0$ et le polynôme X^p est annulateur de N. Ce dernier n'a pour racine que 0 qui est alors la seule valeur propre possible pour N (reste à montrer qu'elle l'est bien).
Comme $N^p = 0$ alors N est non inversible (sinon N^p le serait) donc 0 est valeur propre, ainsi 0 est la seule valeur propre de N. On peut conclure que
$$\mathrm{Sp}(N) = \{0\}.$$

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux nuls.
On introduit les quantités $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

(2) Le calcul donne
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ ed & ac+df & cb \\ fc & ae & eb+df \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} ade+bcf & abe+a^2c+adf & b^2e+abc+bdf \\ ac^2+cdf+bce & ade+bcf & dac+d^2f+bde \\ be^2+def+ace & fbe+df^2+acf & ade+bcf \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\gamma(M)M+\delta(M)I_3 = (ac+df+be)\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (bcf+ade)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^3.$$

(3) Si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls, alors $M^3=0$ donc M est nilpotente.
Réciproquement, si M est nilpotente alors, d'après ce qui précède M a pour unique valeur propre 0.
Si $\delta(M)\neq 0$ alors la relation

$$M^3 = \gamma(M)M+\delta(M)I$$

donne un polynôme annulateur $P(X)=X^2-\gamma(M)X-\delta(M)$. Mais $P(0)=\delta\neq 0$. Or, toute valeur propre d'une matrice est racine de tout polynôme annulateur de cette même matrice. On a une contradiction. Il suit que $\delta(M)=0$.
Il suit que M vérifie alors

$$M^3=\gamma(M)M \iff M(M^2-\gamma(M)I)=0$$

Observons alors que si M est nilpotente, alors M^2 aussi (en effet $M^{2p}=0$ si $M^p=0$). Donc M^2 n'a que 0 pour valeur propre. Si $\gamma(M)\neq 0$, alors $\gamma(M)$ n'est pas valeur propre de M^2, donc $M^2-\gamma(M)I$ est inversible, En multipliant la relation ci-dessus par l'inverse de $M^2-\gamma(M)I$, on obtient alors $M=0$. Mais alors $\gamma(M)=0$ (tous les coefficients de M sont nuls), ce qui est absurde.
On a bien obtenu $\gamma(M)=\delta(M)=0$.

(4) Il suffit de faire calculer $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ et de renvoyer 1 si les deux quantités sont nulles.

```
def test_nilpotente(M) :
    gamma=M[0,1]*M[1,0]+M[0,2]*M[2, 0]+M[1,2]*M[2,1]
    delta = M[0,2]*M[1,0]*M[2, 1]+M[0,1]*M[1, 2]*M[2, 0]
    if gamma == 0 and delta == 0 :
        return 1
    return 0
```

(5) On suppose que a, b et d sont égaux à 1. Par la question précédente, M est nilpotente si et seulement si $ac+df+be=c+f+e=0$ et $bcf+ade=cf+e=0$, ce qui donne

$$\begin{cases} e &= -cf \\ c+f-cf &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e &= -cf \\ c(1-f) &= -f \end{cases}$$

et, pour $f\neq 1$, le système donne

$$\begin{cases} e &= f^2/(1-f) \\ c &= -f/(1-f) \end{cases}.$$

Donc pour chaque $f\neq 1$ il y a une solution au système, ce qui en fait une infinité de triplets (c,e,f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

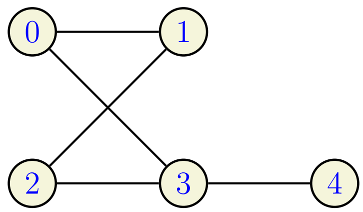
(6) Pour a, b et d égaux à 1 et $f\neq 1$ (et non nul afin que la matrice M ne soit pas triangulaire), la matrice

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -f/(1-f) & 0 & 1 \\ f^2/(1-f) & f & 0 \end{pmatrix}$$

est non triangulaire et nilpotente d'après les calculs précédents. Comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 0. Et comme le seul terme sur sa diagonale est 0, on a construit une matrice dont les valeurs propres sont ses éléments diagonaux mais qui n'est pas triangulaire, fournissant ainsi un contre-exemple à la réciproque d'un résultat du cours sur le spectre des matrices triangulaires.

Exercice 3

On considère le graphe G suivant dont on note A la matrice d'adjacence.



(1) Le graphe n'est pas orienté. Ainsi, dans la matrice d'adjacence $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (car le graphe est d'ordre 5), on met un 1 en position (i, j) s'il y a une arêteentre les sommets i et j et un 0 sinon. En particulier, la matrice A sera symétrique. Cela donne sans difficulté la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.

(2) (a) On a $2-1-0-3$, $2-3-0-3$, $2-3-4-3$, $2-3-0-3$ et $2-1-2-3$ soit 5 chemins de longueur 3 entre les sommets 2 et 3.

(b) (Python). Ce nombre de chemins est donné par le coefficient à l'intersection de la deuxième ligne et troisième colonne de la matrice A^3. On y accède avec les commandes suivantes

```
B=al.matrix_power(A,3)
n=B[1][2]
print(n)
```

On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G, dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la ligne i est le degré du sommet de numéro i (avec $i \in [\![1, 5]\!]$).
On définit également la matrice L, appelée matrice laplacienne de G, en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de L et on suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2, \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$.

(3) (a) Le degré d'un sommet est le nombre de chemins qui partent de ce sommet. Par conséquent, on écrit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On vérifie

$$\begin{aligned} L &= D - A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

comme attendu.

(c) La matrice L est diagonalisable car symétrique.

(4) On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de G sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Comme $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ et que $L \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, alors $LX \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, ${}^tXLX$ est le produit d'une matrice ligne (à 5 colonnes) et d'une matrice colonne (à 5 lignes), c'est une matrice à une ligne et une colonne, identifiée à un réel comme rappelé en début de question.

(b) Observons d'abord que

$$LX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} {}^tXLX &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix} \\ &= 2a^2 - ba - da - ba + 2b^2 - cb - bc + 2c^2 - cd - ad - dc + 3d^2 - de - de + e^2 \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-d)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$, on constate que ${}^tXLX \geq 0$.
Considérons alors une valeur propre λ de L et X un vecteur propre associé. Alors,

$${}^tXLX = {}^tX\lambda X = \lambda\, {}^tXX = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2).$$

Comme $X \neq 0$, il est clair que $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2>0$ (sinon toutes les composantes de X seraient nulles). Ainsi, on a

$$\lambda = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-d)^2+(c-d)^2+(d-e)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \geq 0.$$

(c) Le calcul donne $LU=0$ donc 0 est valeur propre. Comme elles sont toutes positives ou nulles d'après la question précédente et qu'on les a listées par ordre croissant, on a bien que $\lambda_1 = 0$.

(5) (a) On résout l'équation de noyau:

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(L) \iff LX = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a-b-d &=& 0 \\ -a+2b-c &=& 0 \\ -b+2c-d &=& 0 \\ -a-c+3d-e &=& 0 \\ -d+e &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a-b-d &=& 0 \\ 3b-2c-d &=& 0 \\ -b+2c-d &=& 0 \\ -b-2c+5d-2e &=& 0 \\ -d+e &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a-b-d &=& 0 \\ -b+2c-d &=& 0 \\ 3b-2c-d &=& 0 \\ -b-2c+5d-2e &=& 0 \\ -d+e &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a-b-d &=& 0 \\ -b+2c-d &=& 0 \\ c-d &=& 0 \\ -4c+6d-2e &=& 0 \\ -d+e &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff a=b=c=d=e \iff X = aU$$

et on a bien l'équivalence voulue.

(b) La question précédente permet d'affirmer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 1 (il est engendré par U). Ainsi, 0 n'apparait qu'une seule fois sur la diagonale lorsqu'on diagonalise L. Comme toutes les valeurs propres sont positives ou nulles et que seule λ_1 est nulle, on a donc que $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sont des réels strictement positifs.

Problème

Ce problème est adapté d'un problème du sujet ***ECRICOME 2018****, voie ECS. Une solution est disponible ici, proposée par Tom Dutilleul (Problème 2) lors de son DS n°2.*