Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°2 - Sujet B

Solution

Exercice 1

Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 fixés. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$ et le couple $Z = (X, Y)$.
Pour $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on note $p_{i,j} = P([X = i] \cap [Y = j])$ et on introduit les fonctions G_X, G_Y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$G_X(x) = \sum_{i=0}^{n} P(X = i)x^i, \quad G_Y(x) = \sum_{i=0}^{m} P(Y = i)x^i,$$

et la fonction G_Z définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$G_Z(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_{i,j}x^i y^j.$$

(1) Commençons par observer G_Z est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ et donc de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, par la formule des probabilité totales avec les s.c.e $\{[X = i]\}$ puis $\{[Y = j]\}$, on a

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{m} p_{i,j}, \qquad P(Y = j) = \sum_{i=0}^{n} p_{i,j}.$$

Naturellement,

$$G_Z(1, 1) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_{i,j} = 1.$$

Et on a

$$\partial_1 G_Z(1, 1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} ip_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} iP(X = i) = E(X)$$

de même $\partial_2 G_Z(1, 1) = E(Y)$.
Par suite

$$\partial^2_{1,2} G_Z(1, 1) = \partial^2_{2,1} G_Z(1, 1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ijp_{i,j} = E(XY).$$

On peut alors écrire que

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \partial^2_{1,2} G_Z(1, 1) - \partial_1 G_Z(1, 1)\partial_2 G_Z(1, 1).$$

(2) Le sens $\Leftarrow$ est trivial. Montrons donc le sens $\Rightarrow$. Supposons que f soit identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2$. En évaluant en $(x, 0)$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} a_{i,0}x^i = 0$$

or $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_{i,0}x^i$ et polynomiale avec une infinité de racines : tous ses coefficients sont nuls. On obtient

$$\forall i, \qquad a_{i,0} = 0.$$

En évaluant f en $(0,y)$, on trouve de même, pour tout j, $a_{0,j}=0$. Donc

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}x^iy^j = xy\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}a_{i+1,j+1}x^iy^j.$$

Ceci permet de montrer que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}a_{i+1,j+1}x^iy^j=0$$

(en effet, c'est d'abord vrai pour tout couple (x,y) tel que $x\neq 0$ ou $y\neq 0$, mais on peut étendre à $\mathbb{R}^2$ par continuité). Ensuite, on répète le processus. En évaluant en $(x,0)$ puis en $(0,y)$ on montre que, pour tout (i,j), $a_{i,1}=a_{1,j}=0$.
Et on répète le processus jusqu'à avoir montré que tous les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls.

(3) Il est immédiat que si X et Y sont indépendantes alors $G_Z(x,y)=G_X(x)G_Y(y)$. Supposons maintenant que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $G_Z(x,y)=G_X(x)G_Y(y)$ et montrons que X et Y sont indépendantes. On considère alors la fonction polynomiale f ci dessus avec

$$a_{i,j}=p_{i,j}-P(X=i)P(Y=j).$$

Par hypothèse, on a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
0 &= G_Z(x,y)-G_X(x)G_Y(y)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{i,j}x^iy^j-\sum_{i=1}^{n}P(X=i)x^i\sum_{j=1}^{m}P(Y=j)y^j\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{i,j}x^iy^j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(X=i)P(Y=j)x^iy^j\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(p_{i,j}-P(X=i)P(Y=j)\right)x^iy^j\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}x^iy^j
\end{aligned}$$

et on applique le résultat précédent. Tous les coefficients sont nuls et on a bien X et Y indépendantes.

(4) (a) On a reconnu des lois binomiales :

$$X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p),\qquad X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,q)$$

et

$$\begin{aligned}
G_X(x) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}x^i\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(px)^i(1-p)^{n-i}\\
&= (px+1-p)^n=(px+q+r)^n
\end{aligned}$$

par la formule du binome. De même, $G_Y(y)=(qy+p+r)^n$.

(b) Observons que

$$\begin{aligned}
p_{i,j} &= P([X=i]\cap[Y=j])=P(X=i)P_{X=i}(Y=j)\\
&= \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{n-i}{j}\left(\frac{q}{1-p}\right)^j\left(\frac{r}{1-p}\right)^{n-i-j}\\
&= \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^iq^jr^{n-i-j}
\end{aligned}$$

Par suite, en adoptant la convention que $\binom{a}{b} = 0$ si $b > a$, on a

$$\begin{aligned} G_Z(x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^i q^j r^{n-i-j}x^i y^j \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(xp)^i\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}(yq)^j r^{n-i-j} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(xp)^i(yq+r)^{n-i} \\ &= (xp+yq+r)^n \end{aligned}$$

(c) Il est clair que $G_Z(x,y) \neq G_X(x)G_Y(y)$ (pour des raisons de degré notamment). Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

(d) On peut utiliser une formule précédente

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= \partial^2_{1,2}G_Z(1,1) - \partial_1 G_Z(1,1)\partial_2 G_Z(1,1) \\ &= n(n-1)pq - npnq \\ &= -npq < 0 \end{aligned}$$

Plus le nombre de jetons A piochés sur n tirages est grand, plus celui de jeton B est petit, il n'est pas surprenant que la covariance soit négative.

Exercice 2

Cet exercice est proposé par mon collègue Sofiane Akkouche (René Cassin, Bayonne) et on propose sa solution pour laquelle on le remercie chaleureusement.

On admet le résultat suivant, noté $(\star)$:

Résultat admis

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = \ell$. $(\star)$

On considère désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$.

(1) (a) On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

- initialisation. $u_1 = 1 > 0$ et u_1 est bien défini.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que u_n est bien défini et que > 0. Comme $u_n > 0$, u_n est non nul donc $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$ est bien défini et et strictement positif par somme de termes strictement positifs.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n^2} \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

(c) Comme (u_n) est croissante, soit elle converge vers un réel ℓ (si elle est majorée), soit elle diverge vers $+\infty$.
Supposons que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. Comme $t \mapsto t + \dfrac{1}{t^2}$, cette limite ℓ vérifie la relation : $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell^2}$, ce qui donne :

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell^2} \implies \frac{1}{\ell^2} = 0 \implies 1 = 0$$

ce qui est absurde.

Ainsi, la suite (u_n) ne converge pas donc, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(2) Soit β un réel non nul.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned}\left(\left(1+\frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - 1\right) \times u_n^\beta &= u_n^\beta\left(1+\frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - u_n^\beta \\ &= \left(u_n\left(1+\frac{1}{u_n^3}\right)\right)^\beta - u_n^\beta \\ &= \left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)^\beta - u_n^\beta \\ &= u_{n+1}^\beta - u_n^\beta\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \left(\left(1+\frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - 1\right) \times u_n^\beta.$$

(b) On a au voisinage de 0 : $(1+x)^\beta - 1 \sim \beta x,\ x \to 0.$

(c) Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n^3} = 0$. Ainsi, on a :

$$\left(1+\frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - 1 \sim \beta\frac{1}{u_n^3}, \qquad n \to +\infty$$

et par produit :

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \left(\left(1+\frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - 1\right) \times u_n^\beta \sim \beta\frac{1}{u_n^3} \times u_n^\beta = \beta u_n^{\beta-3} \quad \text{soit} \quad u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \sim \beta u_n^{\beta-3}, \qquad n \to +\infty.$$

(d) Comme $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \sim \beta u_n^{\beta-3}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \lim_{n\to+\infty} \beta u_n^{\beta-3} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta < 3 \\ \beta = 3 & \text{si } \beta = 3 \\ +\infty & \text{si } \beta > 3 \end{cases} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

Ainsi, la suite $\left(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie **non nulle** si et seulement si $\beta = 3$.

(3) (a) D'après la question précédente, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente car

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(u_{n+1}^3 - u_n^3\right) = 3.$$

Ainsi, on peut utiliser le résultat $(\star)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = 3 &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(u_{k+1}^3 - u_k^3\right) = 3 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(u_{n+1}^3 - u_1^3\right) = 3 \quad \text{somme téléscopique} \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}^3 - 1}{3n} = 1 \\ &\iff u_{n+1}^3 - 1 \sim 3n\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a : $u_{n+1}^3 \sim u_{n+1}^3 - 1$, ce qui donne :

$$u_{n+1}^3 \sim 3n \sim 3(n+1)$$

donc par puissance :

$$u_{n+1} \sim (3(n+1))^{1/3} \quad \text{soit} \quad u_n \sim (3n)^{1/3}.$$

(b)
- Comme $u_n \sim (3n)^{1/3}$, on a par quotient : $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{(3n)^{1/3}} = \dfrac{1}{3^{1/3}}\dfrac{1}{n^{1/3}}$.
- La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/3}}$ diverge ($\alpha = 1/3 < 1$).
- Les séries sont à termes positifs.

D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{u_n}$ diverge.

On souhaite à présent démontrer le résultat ($\star$) dans le cas particulier où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
On suppose donc dans la suite de l'exercice que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante qui converge vers un réel ℓ.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

On veut montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

(4) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left(n\sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \\
b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} + n\sum_{k=1}^{n} a_k - n\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

(b) La relation précédente donne pour tout entier n non nul.

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \qquad \text{en remarquant que } \; na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{n+1} - a_k}_{\geq 0}\right) \qquad \text{avec } \; \forall k \in [\![1,n]\!],\; a_{n+1} - a_k \geq 0 \quad \text{car } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{n+1} - b_n \geq 0$ donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) La suite (a_n) est croissante et converge vers ℓ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n \leq \ell.$$

On a alors :

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell = \ell.$$

Ainsi, la suite (b_n) est majorée par ℓ.
Comme cette suite est croissante, on en déduit d'après le théorème de la limite monotone, qu'elle converge.

Ainsi, la suite (b_n) vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$ (car $b_n \leq \ell$).

(d) On a :

$$\begin{aligned}
2b_{2n} - b_n &= 2\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k
\end{aligned}$$

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, on a pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $a_k \geq a_n$, ce qui donne :

$$2b_{2n} - b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_n = \frac{1}{n}na_n = a_n$$

Ainsi, pour tout entier n non nul, $2b_{2n} - b_n \geq a_n$.

(e) En passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$2b_{2n} - b_n \geq a_n \implies 2\ell' - \ell' \geq \ell \implies \ell' \geq \ell$$

Or, on a déjà vu que : $\ell' \leq \ell$, ce qui permet de conclure que $\ell' = \ell$. La suite (b_n) converge vers ℓ.

(5) Python.
On rappelle que la commande `np.cumsum(T)` (du package `numpy`) renvoie une liste contenant les sommes cumulées de la liste `T`. Par exemple : `np.cumsum([1,4,6,3])` renvoie `[1,5,11,14])`.

(a) Dans la fonction python suivante, le paramètre `a` est une liste contenant les premiers termes de la suite (a_n). Compléter cette fonction pour qu'elle renvoie les premiers termes de la suite (b_n).

```
def suite_b(a) :
    S = np.cumsum( a )
    b = [ S[i]/(i+1) for i in range(len(S))]
    return b
```

(b) La liste `a` dans la première ligne du programme contient les premiers termes de la suite (a_n) avec $a_n = 2 - 1/n^2$ qui converge clairement vers $\ell = 2$.
D'après le résultat $(\star)$, la suite (b_n) converge également vers 2 donc la troisième ligne affichera b_{1000} qui sera une valeur proche de 2 (sa limite).

```
a = np.array([ 2-1/n**2 for n in range(1,1001) ])
b = suite_b(a)
print(b[999])
```

Exercice 3

Cet exercice est proposé par mon collègue Sofiane Akkouche (René Cassin, Bayonne) et on propose sa solution pour laquelle on le remercie chaleureusement.

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x, on pose :

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x/n \\ x/n & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

(1) On obtient $P^2 = 2I$ donc $P\left(\frac{1}{2}P\right) = I$ ce qui montre que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}P$.

(2) Soit x un réel fixé.

(a) La matrice $R(x)$ est symétrique donc $R(x)$ est diagonalisable.

(b) On calcule : $R(x)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}e^x+e^{-x} & e^x-e^{-x}\\ e^x-e^{-x} & e^x+e^{-x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2e^x\\2e^x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^x\\e^x\end{pmatrix} = e^x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq 0$, on en déduit que $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $R(x)$ associé à la valeur propre e^x.

De même, on a : $R(x)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \neq 0$, on en déduit que $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $R(x)$ associé à la valeur propre e^{-x}.

(c) Comme $R(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elle admet au plus 2 valeurs propres et comme on en a trouvé deux on peut conclure que $\mathrm{Sp}(R(x)) = \{e^x, e^{-x}\}$.
Ainsi, 0 n'est pas une valeur propre de $R(x)$ (car $\exp(x) > 0$) donc $R(x)$ est inversible.

(d) On a vu que $\mathrm{Sp}(R(x)) = \{e^x, e^{-x}\}$.
De plus, la famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est libre (2 vecteurs non colinéaires) dans $M_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 2 donc c'est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $R(x)$. Ainsi, la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ est donc la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{C}$. D'après la formule de changement de base, on a : $R(x) = PD(x)P^{-1}$ avec $D(x) = \begin{pmatrix}e^x & 0\\0 & e^{-x}\end{pmatrix}$.

(e) On a vu que : $R(x) = PD(x)P^{-1}$. On a de même : $R(y) = PD(y)P^{-1}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
R(x)R(y) &= PD(x)P^{-1}PD(y)P^{-1}\\
&= PD(x)D(y)P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}e^x & 0\\0 & e^{-x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^y & 0\\0 & e^{-y}\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}e^xe^y & 0\\0 & e^{-x}e^{-y}\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}e^{x+y} & 0\\0 & e^{-x-y}\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= PD(x+y)P^{-1}\\
&= R(x+y)
\end{aligned}$$

(f) Par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a : $(R(x))^0 = I$ et $R(0x) = R(0) = I$.
- <u>hérédité.</u> Supposons, que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $R(x)^n = R(nx)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
R(x)^{n+1} &= R(x)^nR(x)\\
&= R(nx)R(x) \quad \text{par HR}\\
&= R(nx+x) \quad \text{d'après la question précédente}\\
&= R((n+1)x)
\end{aligned}$$

(g) Ainsi, pour tout entier naturel n, $R(x)^n = R(nx)$.

(h) On a déjà vu que $R(0) = I$. En choisissant $y = -x$ dans la question 2e, on obtient :
$R(x)R(-x) = R(x-x) = R(0) = I$ donc $R(x)^{-1} = R(-x)$.

On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M. On note alors : $\lim_{n\to\infty} M_n = M$.
On admet alors le résultat suivant noté $(\star\star)$.

Résultat admis

Si $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$ et Q est une matrice inversible, alors : $\lim\limits_{n\to\infty} QM_nQ^{-1} = QMQ^{-1}$. $(\star\star)$.

L'objectif de la suite de l'exercice est de déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $((A_n(x))^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(3) Soit n un entier naturel non nul fixé et x un réel non nul fixé.

(a) Déterminons $\mathrm{Ker}\left(A_n(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)I\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(A_n(x) - \left(1-\frac{x}{n}\right)I\right)$. Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

- On a :

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}\left(A_n(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)I\right) &\iff \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{n} & \dfrac{x}{n} \\ \dfrac{x}{n} & -\dfrac{x}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{cases} -a\dfrac{x}{n} + b\dfrac{x}{n} = 0 \\ a\dfrac{x}{n} - b\dfrac{x}{n} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (-a+b)\dfrac{x}{n} = 0 \\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -a+b = 0 & \text{car } \dfrac{x}{n} \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = b \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\left(A_n(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)I\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0\}$ donc $1+\frac{x}{n} \in \mathrm{Sp}(A_n(x))$.

- De même on obtient :
$\mathrm{Ker}\left(A_n(x) - \left(1-\frac{x}{n}\right)I\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0\}$ donc $1-\frac{x}{n} \in \mathrm{Sp}(A_n(x))$.
- Comme $A_n(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elle admet au plus 2 valeurs propres et comme on en a trouvé deux on peut conclure que

$$\mathrm{Sp}(A_n(x)) = \left\{1+\frac{x}{n} ; 1-\frac{x}{n}\right\}.$$

De plus, on a vu que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{1+\frac{x}{n}}(A_n(x))$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{1-\frac{x}{n}}$ (famille libre car constituée d'un seul vecteur non nul).

(b) D'après la question précédente, la famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A_n(x)$. Ainsi, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est donc la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{C}$. D'après la formule de changement de base, on a :

$$A_n(x) = PD_n(x)P^{-1} \qquad \text{avec } D_n(x) = \begin{pmatrix} 1+\frac{x}{n} & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{n} \end{pmatrix}.$$

(4) Soit x un réel non nul fixé.

(a) Par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $k = 0$, on a : $A_n(x)^0 = I$ et $PD_n(x)^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on ait $A_n(x)^k = PD_n(x)^k P^{-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} A_n(x)^{k+1} &= A_n(x)^k A_n(x) \\ &= PD_n(x)^k \underbrace{P^{-1}P}_{=I} D_n(x)^k P^{-1} \qquad \text{par HR et d'après la formule de la Question 3b} \\ &= PD_n(x)^{k+1} P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier k : $A_n(x)^k = PD_n(x)^k P^{-1}$.

(b) On a : $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)$.
Or, pour $n \to +\infty$, $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \sim n\left(\dfrac{x}{n}\right) = x$ par produit car $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \sim \dfrac{x}{n}$ car $\dfrac{x}{n} \longrightarrow 0$.
Ainsi, on a :
$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = x$ puis par composition $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^x$ soit

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

De même, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x}$.

(c) Comme $D_n(x)$ est une matrice diagonale, on a d'après la définition de la limite d'une matrice :

$$D_n(x)^n = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \end{pmatrix}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} D_n(x)^n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n & 0 \\ 0 & \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = D(x).$$

(d) Utilisons le résultat $(\star\star)$ avec la matrice $D_n(x)^n$ et P, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} A_n(x)^n &= \lim_{n\to\infty} PD_n(x)^n P^{-1} \qquad \text{d'après la question 4a} \\ &= PD(x)P^{-1} \qquad \text{d'après la question précédente} \\ &= R(x) \end{aligned}$$

Problème

Partie 1 : Loi de Gumbel

Soient m un réel et a un réel strictement positif. On introduit la fonction $f_{m,a}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{m,a}(x) = \frac{1}{a}\exp\left(\frac{m-x}{a} - e^{\frac{m-x}{a}}\right).$$

(1) Il est clair que $f_{m,a}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (car $a>0$ et l'exponentielle est strictement positive) et qu'elle y est continue (par composée de somme de fonctions usuelles continues). En observant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{m,a}(x) = \frac{1}{a}\exp\left(\frac{m-x}{a}\right)\exp\left(-e^{\frac{m-x}{a}}\right),$$

on peut écrire, pour $A < B$ réels,

$$\begin{aligned} \int_A^B f_{m,a}(x)\mathrm{d}x &= \int_A^B \frac{1}{a}\exp\left(\frac{m-x}{a}\right)\exp\left(-e^{\frac{m-x}{a}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\exp\left(-e^{\frac{m-x}{a}}\right)\right]_A^B \\ &= \exp\left(-e^{\frac{m-B}{a}}\right) - \exp\left(-e^{\frac{m-A}{a}}\right) \\ &\underset{A\to-\infty,\ B\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \end{aligned}$$

car

$$-e^{\frac{m-B}{a}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{et} \quad -e^{\frac{m-A}{a}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Ainsi, $f_{m,a}$ peut bien être considérée comme une densité de probabilité.

On dira qu'une variable aléatoire Z ayant pour densité $f_{m,a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre m et a et on écrira $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(m,a)$.

(2) On reprend le calcul de l'intégrale précédente. On remplace B par t et on fait tendre A vers $-\infty$. On obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_{m,a}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{m,a}(x)\mathrm{d}x = \exp\left(-e^{\frac{m-t}{a}}\right).$$

(3) Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(0,1)$. On connait donc l'expression de sa fonction de répartition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_Z(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Il suit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{aZ+m}(x) &= P(aZ+m \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-m}{a}\right) \\ &= \exp\left(-e^{\frac{m-x}{a}}\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien la fonction de répartition de la loi $\mathcal{G}(m,a)$. La réciproque se montre de la même manière et on omet le détail ici.

(4) Question classique... Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_{-\ln(X)}(x) &= P(-\ln(X) \leq x) = P(X \geq e^{-x}) = 1 - P(X < e^{-x}) \\ &= 1 - F_X(e^{-x}) = 1 - \left(1 - e^{-e^{-x}}\right) \\ &= e^{-e^{-x}}, \end{aligned}$$

et on reconnait bien la fonction de répartition de la loi$\mathcal{G}(0,1)$.

(5) Python. C'est un procédé de simulation par inversion. On part d'une loi exponentielle que l'on sait simuler, on applique le log pour trouver la loi de Gumbel de paramètres 0 et 1 et on fait la transformation affine ci-avant pour avoir la loi de Gumbel de paramètres m et a.

```python
def Gumbel(m, a):
    x=rd.exponential(1)
    z=-np.log(x)
    return a*z+m
```

(6) Il suffit de résoudre avec l'expression de Psi obtenue ci-avant. Soit $\alpha \in]0;1[$.

$$\begin{aligned} \Psi(x) = 1-\alpha &\iff e^{-e^{-x}} = 1-\alpha \\ &\iff -e^{-x} = \ln(1-\alpha) \\ &\iff x = -\ln(-\ln(1-\alpha)) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \Psi(x) = \alpha &\iff e^{-e^{-x}} = \alpha \\ &\iff -e^{-x} = \ln(\alpha) \\ &\iff x = -\ln(-\ln(\alpha)) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$c_\alpha = -\ln(-\ln(1-\alpha)), \quad \text{et} \quad d_\alpha = -\ln(-\ln(\alpha)).$$

Partie 2 : $n-$échantillon de lois exponentielles et loi de Gumbel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un $n-$échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$. On pose $L_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

(7) Il y a un peu de travail pour cette question mais c'est du classique de chez classique.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
F_{M_n}(t) &= P(M_n \leq t) = P(\max(X_1, ..., X_n) \leq t) \\
&= P([X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t] \cap ... \cap [X_n \leq t]) \\
&= P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t)...P(X_n \leq t) \qquad \text{(par indépendance des } X_i\text{)} \\
&= P(X_1 \leq t)^n \qquad \text{(car les } X_i \text{ suivent toutes la même loi)} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
F_{L_n}(t) &= P(L_n \leq t) = 1 - P(L_n > t) = 1 - P(\min(X_1, ..., X_n) > t) \\
&= 1 - P([X_1 > t] \cap [X_2 > t] \cap ... \cap [X_n > t]) \\
&= 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t)...P(X_n > t) \qquad \text{(par indépendance des } X_i\text{)} \\
&= 1 - P(X_1 > t)^n \qquad \text{(car les } X_i \text{ suivent toutes la même loi)} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

En particulier, on observe que $L_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

(8) Sans difficulté :

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(t) &= P(Y_n \leq t) = P(nL_n \leq t) = P\left(L_n \leq \frac{t}{n}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda \frac{t}{n}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

et on peut donc affirmer que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

(9) On maintenant alors $Z_n = \lambda M_n - \ln(n)$.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(t) &= P(Z_n \leq t) = P(\lambda M_n - \ln(n) \leq t) \\
&= P\left(M_n \leq \frac{t + \ln(n)}{\lambda}\right) \\
&= F_{M_n}\left(\frac{t + \ln(n)}{\lambda}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t < -\ln(n) \\ \left(1 - e^{-t - \ln(n)}\right)^n, & \text{si } t \geq -\ln(n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t < -\ln(n) \\ \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n, & \text{si } t \geq -\ln(n) \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $\ln(n) \to +\infty$, on a, pour n assez grand, $t \geq -\ln(n)$.
Comme $e^{-t}/n \to 0$, on peut utiliser l'équivalent de $\ln(1+u)$ en 0.

$$\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)\right).$$

Or,

$$n\ln\left(1-\frac{e^{-t}}{n}\right)\sim n\left(-\frac{e^{-t}}{n}\right)=-e^{-t}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-e^{-t}.$$

Par composition par l'exponentielle on a donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$F_n(t)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\exp\left(-e^{-t}\right)=\Psi(t),$$

où Ψ désigne la fonction de répartition de la loi de Gumbel $\mathcal{G}(0,1)$.

(c) D'après la question précédente et la définition de convergence en loi, on peut affirmer que (Z_n) converge en loi vers $Z\hookrightarrow\mathcal{G}(0,1)$.

Partie 3 : Construction de deux intervalles de confiance

La durée de vie d'une ampoule est modélisée par une variable aléatoire $X\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda>0$ est inconnu. On cherche à estimer la durée de vie moyenne $\mu=E(X)=1/\lambda$ et on dispose d'un échantillon de n ampoules (dont les durées de vie sont supposées indépendantes).

(10) Dans cette question, on suppose que la seule information dont on dispose est la durée de vie de l'ampoule qui a *grillé* le plus tôt.

(a) Il faut commencer par calculer $E(L_n)$. Comme on a reconnu la loi de L_n, on connait sont espérance d'après le cours sans calcul supplémentaire : $E(L_n)=\dfrac{1}{\lambda n}$.

Pour estimer sans biais $\mu=1/\lambda$, il suffit, par linéarité de l'espérance de poser

$$\tilde{L}_n=nL_n.$$

L'estimateur étant sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance. On a donc

$$r(\tilde{L}_n)=V(\tilde{L}_n)=V(nL_n)=n^2V(L_n)=\frac{n^2}{n^2\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

On ne peut pas utiliser Bienaymé-Tchebychev pour conclure que l'estimateur est convergent car le risque ne tend pas vers 0 mais attention, on ne peut pas non plus conclure qu'il n'est pas convergent; il faut calculer la probabilité ci-dessous.

(b) Soit $\varepsilon>0$.

$$\begin{aligned}\left|\tilde{L}_n-\mu\right|\leq\varepsilon &\iff -\varepsilon\leq\tilde{L}_n-\frac{1}{\lambda}\leq\varepsilon\\ &\iff -\varepsilon+\frac{1}{\lambda}\leq\tilde{L}_n\leq\varepsilon+\frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

Or, d'après la Question (8), on sait que $\tilde{L}_n\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$ donc

$$\begin{aligned}P\left(\left|\tilde{L}_n-\mu\right|>\varepsilon\right) &= 1-P\left(\left|\tilde{L}_n-\mu\right|\leq\varepsilon\right)\\ &= 1-P\left(-\varepsilon+\frac{1}{\lambda}\leq\tilde{L}_n\leq\varepsilon+\frac{1}{\lambda}\right)\\ &= 1-\left(\left(1-e^{-\lambda\left(\varepsilon+\frac{1}{\lambda}\right)}\right)-\left(1-e^{-\lambda\left(-\varepsilon+\frac{1}{\lambda}\right)}\right)\right)\\ &= 1-e^{-1+\lambda\varepsilon}+e^{-1-\lambda\varepsilon}.\end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, $P\left(\left|\tilde{L}_n-\mu\right|>\varepsilon\right)$ ne tend pas vers 0 lorsque $n\to+\infty$ (l'expression ne dépend même pas de n !!!), et l'estimateur n'est donc pas convergent.

(d) Soient $\alpha\in]0;1[$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(1)$. Alors, comme

$$1-\frac{\alpha}{2}\in]0;1[,\quad \ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)<0\quad\text{et}\quad-\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)>0.$$

De même,

$$-\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)>0$$

donc

$$\begin{aligned} P\left(Y < -\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) &= 1 - e^{\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\alpha}{2} \\ P\left(Y > -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) &= 1 - P\left(Y \leq -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \left(1 - e^{\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

(e) On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} \mu \in I_{\alpha,n} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\tilde{L}_n}{-\ln(\alpha/2)} & \leq & \mu \\ \dfrac{\tilde{L}_n}{-\ln(1-\alpha/2)} & \geq & \mu \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda\tilde{L}_n & \leq & -\ln(\alpha/2) \\ \lambda\tilde{L}_n & \geq & -\ln(1-\alpha/2) \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \lambda\tilde{L}_n \in [-\ln(1-\alpha/2);\ -\ln(\alpha/2)] \end{aligned}$$

Or, comme $\tilde{L}_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, un résultat du cours (facile à redémontrer avec un calcul rapide de fonction de répartition), permet d'affirmer que $\lambda\tilde{L}_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Ainsi, la question précédente permet d'écrire que

$$\begin{aligned} P\left(\mu \in I_{\alpha,n}\right) &= P\left(Y \leq -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - P\left(Y < -\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 1 - P\left(Y > -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - P\left(Y < -\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha \end{aligned}$$

et $I_{\alpha,n}$ est bien un intervalle de confiance au seuil $1-\alpha$ pour μ.

(11) Dans cette question, on suppose que l'on connait la durée de vie de la dernière ampoule. Soit $\alpha \in]0;1[$.

(a) En utilisant les résultats trouvés précédemment, on a

$$c_{\alpha/2} = -\ln(-\ln(1-\alpha/2)), \quad \text{et} \quad d_{\alpha/2} = -\ln(-\ln(\alpha/2)).$$

(b) Observons que

$$\begin{aligned} \mu \in J_{\alpha,n} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu & \geq & \dfrac{M_n}{\ln(n)+c_{\alpha/2}} \\ \\ \mu & \leq & \dfrac{M_n}{\ln(n)+d_{\alpha/2}} \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow d_{\alpha/2} \leq \frac{M_n}{\mu} - \ln(n) \leq c_{\alpha/2} \\ &\Longleftrightarrow d_{\alpha/2} \leq Z_n \leq c_{\alpha/2}, \end{aligned}$$

où $Z_n = \lambda M_n - \ln(n)$ est introduit et étudié dans la Partie 2. Il suit que

$$\begin{aligned} P\left(\mu \in J_{\alpha,n}\right) &= P\left(d_{\alpha/2} \leq Z_n \leq c_{\alpha/2}\right) \\ &= P(Z_n \leq c_{\alpha/2}) - P(Z_n < d_{\alpha/2}) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(Z \leq c_{\alpha/2}) - P(Z < d_{\alpha/2}), \end{aligned}$$

où $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(0,1)$ d'après la Question (9c).
Or,

$$P(Z \leq c_{\alpha/2}) - P(Z < d_{\alpha/2}) = \Psi(c_{\alpha/2}) - \Psi(d_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha,$$

et $J_{\alpha,n}$ est bien un intervalle de confiance asymptotique au seuil $1-\alpha$ pour μ.

(12) Python. Les commandes permettent de simuler 10 fois des échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre $1/2$ (donc avec $\mu = 2$) et de construire et d'afficher les deux types d'intervalles de confiances précédents. Si le paramètre à estimer semble être à chaque fois dans tous les intervalles de confiances, il parait assez flagrant que les intervalles construits avec M_n ont une bien plus faible étendue (et donnent des informations bien plus précises).

Ceci est cohérent avec l'idée naïve selon laquelle connaître le moment où la dernière ampoule grille nous donne plus d'informations que celui où la première ampoule grille. Il faut cependant attendre que toutes les ampoules aient grillé...