



Séance d'exercices du 05/09

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes; on ne demande pas le domaine de validité (*i.e.* on admet que toutes ces expressions ont un sens):

$$A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}; \quad B = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1; \quad C = \frac{\frac{1}{7} \left(1 + \frac{1}{7}\right)}{\left(1 - \frac{1}{7}\right)^3} + \frac{\frac{1}{7}}{\left(1 - \frac{1}{7}\right)^2};$$

$$D = \frac{\frac{a^2 + b^2}{b} + 2a}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}; \quad E = \frac{2}{x(x-1)} \left(\frac{x^2(x-1)}{2} - \frac{x(x-1)(2x-1)}{6} \right)$$

$$F = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}}; \quad G = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}};$$

$$H = 2^n + 2^n; \quad I = (2^{2^n})^{2^n}; \quad J = 2^{2^n} \times 2^{2^n}; \quad K = 2^{n+1} - 2^n$$

$$L = \frac{(2^3 \times 7^5)^{-2}}{(7^3 \times 2^{-3})^3}; \quad M = \left[\frac{(3 \times 7^2)^{-2} \times 2}{2^{-2} \times 3^3 \times 7^{-3}} \right]^{-3}; \quad N = \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 \times \left[\left(\frac{3}{7} \right)^{-2} \right]^3; \quad O = \left(-\frac{5^2}{2^4} \right)^{-3} \times \left(-\frac{4}{9} \right)^6;$$

$$P = \frac{(ab^{-1})^3}{c^2b^{-2}} + \frac{(acb^{-1})^{-2}}{bc^{-2}} \times \frac{(a^3b)^2}{(cb)^3}; \quad Q = \frac{(a^2b^{-2})^{-5}}{(c^{-2}b^3)^{-2}} \times \frac{ab - c^{-1}}{c - (ab)^{-1}};$$

$$R = \frac{(e^x)^y - e^y e^{-x}}{(e^y)^x - \frac{1}{e^{-y} e^x}}; \quad S = \frac{\ln(\sqrt{ab})}{\ln a + \ln b}$$

$$T = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) + 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right); \quad U = \frac{e^{2\alpha}}{(e^\alpha)^2 - \frac{1}{e^{-3\alpha}}}.$$

Exercice 2. Donner l'expression des dérivées des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

$$f_1(x) = x + e^x; \quad f_2(x) = \sqrt{x} + 2x; \quad f_3(x) = \frac{x-1}{x^2 + 2x - 3}; \quad f_4(x) = x^2 e^x$$

$$f_5(x) = x \ln(x) - x; \quad f_6(x) = (2x + 3)^3; \quad f_7(x) = \ln(x^2 + 1); \quad f_8(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$$

$$f_9(x) = \frac{x - e^x}{x}; \quad f_{10}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad f_{11}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes:

(i) $x^2 - 6x + 3 = 0;$

(ii) $11x - 3x^2 = 22;$

(iii) $25x^2 + 20x + 8 = 4;$

(iv) $x - 2 = \sqrt{x};$

(v) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0;$

(vi) $x - 2 + \frac{1}{3-x} = 0;$

(vii) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11);$

(viii) $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 11);$

(ix) $\ln(-x-2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3);$

(x) $\sqrt{x^2 - 4} = 3 - x;$

(xi) $\frac{x\sqrt{x-2}}{x-3} = \frac{x-1}{\sqrt{x-2}}.$

Exercice 4. Soit A la fonction définie sur \mathbb{R} par $A(x) = (2x - 3)^2 + 12(x + 2)(2x - 3).$

- (1) Développer $A(x).$
- (2) Factoriser $A(x).$
- (3) Calculer $A(0), A(\sqrt{2}), A(\frac{3}{2})$ en utilisant la forme la plus adaptée.
- (4) Résoudre l'équation $A(x) = 0.$
- (5) Déterminer les antécédents de -63 par $A.$

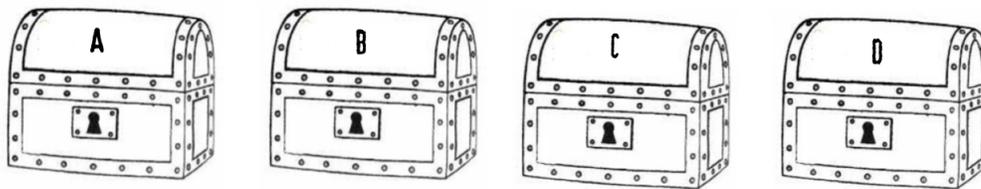
Exercice 5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x.$

Exercice 6. Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donnée par

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée. Une contrainte de budget impose $B + 2N = 23.$ Déterminer pour quelle quantité d'engrais utilisé le rendement est optimal.

Exercice 7. (Chasse au trésor, le retour) Dans une pièce, il y a quatre coffres alignés notés A, B, C et $D,$ dont un seul contient un trésor. Dans chacun des trois autres coffres, il y a une clé qui ouvre un des autres coffres. Mais si on tente d'ouvrir un coffre avec une mauvaise clé, la serrure se bloque et tout espoir d'accéder le trésor est perdu.



Sous chaque coffre, figure une inscription. L'inscription du coffre contenant le trésor est fausse, mais les trois autres sont exactes. Voici ce qui est inscrit sous chaque coffre

- Coffre A : la clé à l'intérieur ouvre le coffre contenant le trésor.
- Coffre B : il faut ouvrir ce coffre avant d'atteindre le trésor.
- Coffre C : la clé à l'intérieur ouvre le coffre $B.$
- Coffre D : la clé qui ouvre ce coffre se trouve dans le coffre $B.$

Vous disposez au départ d'une clé E sur laquelle il est marqué : *cette clé ouvre le coffre situé entre celui qui contient le trésor et celui qui contient la clé pour ouvrir le coffre $A.$*

Dans quel ordre devez-vous ouvrir les coffres pour accéder au trésor ?