Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°1

Mercredi 6 Décembre
Durée : 4 heures

Une grande importance sera apportée à la présentation, la lisibilité, les efforts de rédaction et la clarté des résultats exposés que l'on demande d'encadrer. Toute copie qui ressemble à un brouillon ne sera pas lue.

Amuses-bouche

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) Résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z-4t &=& -1 \\ 2x+2y+2z-3t &=& 2 \\ 3x+6y-2z+t &=& 8 \\ 2x+y+5z+t &=& 5 \end{array}\right. .$$

(2) Montrer que
$$\forall x \in [0;1/2], \qquad -x-x^2 \leq \ln(1-x).$$

(3) Déterminer l'expression du terme général de la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$w_0 = 1,\ w_1 = 0, \quad \text{et} \quad w_{n+2} = 3w_{n+1} + 4w_n.$$

(4) Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous
$$(i)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(5) On pioche quatre cartes dans un jeu de 32 (sans remise). Combien y a-t-il de mains avec exactement une paire de dames et deux trèfles ?

(6) Dans un groupe de 8 personnes, deux d'entre elles sont végétariennes, 4 ne mangent pas de fromage, 5 mangent du Poisson mais pas de viande (régime *pescetarien*) et une est pescétarienne et ne mange pas de fromage.
Ce groupe d'amis peut-il aller dans un restaurant où le menu ne propose que deux alternatives au choix : Saumon sauvage et pommes de terres *ou* risotto de cèpes au parmesan[1] ?

[1] Le parmesan est un fromage. Et c'est bon.

Exercice 1

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x) = e^x - xe^{1/x}.$$

Partie 1 - Étude de la fonction φ

On **admet** que φ est *dérivable trois fois* sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce qui garantie l'existence de φ', dérivée de φ, celle de φ'', dérivée de φ' et celle de φ''', dérivée de φ''). Enfin, on donne l'encadrement $2 < e < 3$.

(1) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{1/x}.$$

(2) Déterminer les variations de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
(3) En déduire les variations de φ' puis, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) \geq e.$$

(4) En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(5) Déterminer la valeur de la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donner une interprétation graphique du résultat.
(6) Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$
(7) On donne $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer que

$$\forall x \geq 3, \qquad \varphi(x) \geq ex.$$

Indication. On pourra poser $\psi(x) = \varphi(x) - ex$ et utiliser la Question (3).
(8) Représenter l'allure la courbe de φ en y faisant apparaître les différents éléments étudiés.

Partie 2 - Étude de la suite (u_n)

On introduit la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

(9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \geq 3e^n$.
(10) Montrer que la suite (u_n) est croissante. Est-elle convergente ? A-t-elle une limite ? Si oui, la préciser.
(11) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \leq \frac{e - e^{-n}}{3(e-1)}.$$

(12) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$?

Exercice 2

Partie 1 - Préliminaires

On considère la suite (H_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Montrer que (H_n) est croissante.
(2) Montrer que $H_{2n} - H_n \geq 1/2$.
(3) On suppose que (H_n) est convergente vers une certaine limite ℓ. Quelle est alors la limite de (H_{2n})? En déduire une contradiction puis que

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$

Partie 2 - Étude de suites

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(4) Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la suite (S_n) diverge.
(*On pourra utiliser le principe de comparaison et la partie préliminaire*).

Dans toute la suite on prend donc $p \geq 2$.

(5) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)\, u_{n+2} = (n+2)\, u_{n+1}.$$

(6) En déduire par récurrence sur n que

$$S_n = \frac{1}{p-1}\left(1 - (n+p+1)\, u_{n+1}\right)$$

(7) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
(8) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
(9) Utiliser le résultat pprécédent pour montrer que (S_n) converge et donner sa limite en fonction de p et de ℓ.
(10) On suppose dans cette question que $\ell \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ell}{nu_n} = 1, .$$

et l'existence d'un $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N_0$,

$$u_n \geq \frac{\ell}{2n}.$$

En déduire, en utilisant le principe de comparaison et la partie préliminaire, une contradiction à propos de la convergence de (S_n).
(11) Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

Exercice 3

Un livre comporte 14 chapitres. Un étudiant paresseux décide de n'en lire que 3.

(1) Combien y a-t-il de façons de choisir ces trois chapitres?
(2) Soit $k \in \{3, 4, 5, ..., 14\}$ fixé. Dénombrer les choix de trois chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisi (*exemple*: si $k = 3$, il n'y a qu'un seul choix possible; celui des chapitres 1, 2 et 3).
(3) En déduire que

$$\binom{14}{3} = \sum_{k=2}^{13} \binom{k}{2}.$$

(4) Dans cette dernière question, on veut généraliser le résultat de la question précédente. Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour tout $p \in \{1, 2, ..., n\}$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 4

Soient E un ensemble (ayant au moins 3 éléments) et A une partie de E telle que $A \notin \{\emptyset; E\}$. On définit l'application f_A par

$$\begin{array}{rccl} f_A : & E & \longrightarrow & \{0;1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

(1) L'application f_A est-elle injective? surjective? bijective?
(2) Montrer que $1 - f_A = f_{\overline{A}}$.
(3) Soient B une autre partie de E et f_B la fonction correspondante. Que peut-on dire de $f_A f_B$?

Exercice 5

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
(2) Montrer que, pour tout entier n, on a $u_n \geq 2$.
(3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
(4) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a $\ln(1 + x) \leq x$.
(5) En déduire que, pour tout entier n, on a

$$1 \leq u_n \leq v_n,$$

où (v_n) est une suite que l'on explicitera et dont on déterminera la limite.
(6) Conclure que la suite (u_n) converge vers un élément ℓ de $[2; e^2]$.