Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°1

Solution

Une grande importance sera apportée à la présentation, la lisibilité, les efforts de rédaction et la clarté des résultats exposés que l'on demande d'encadrer. Toute copie qui ressemble à un brouillon ne sera pas lue.

Amuses-bouche

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) On résout le système par un pivot de Gauss

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z-4t & = & -1 \\ 2x+2y+2z-3t & = & 2 \\ 3x+6y-2z+t & = & 8 \\ 2x+y+5z+t & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z-4t & = & -1 \\ 8z+5t & = & 4 \\ 3y+7z+13t & = & 11 \\ -y+11z+9t & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+8z+5t & = & 6 \\ y-11z-9t & = & -7 \\ 8z+5t & = & 4 \\ 40z+40t & = & 32 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ 8y-17t & = & -12 \\ 8z+5t & = & 4 \\ 15t & = & 12 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 1/5 \\ z & = & 0 \\ t & = & 4/5 \end{array}\right. .$$

(2) Pour montrer l'inégalité demandée, on étudie la fonction différence. En posant $\varphi(x) = \ln(1-x) + x + x^2$, il faut donc montrer que pour tout $x \in [0; 1/2]$, on a $\varphi(x) \geq 0$. La fonction est dérivable sur l'intervalle en question (comme combinaison de fonctions usuelles dérivables) et on a

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{-2x^2+x}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0, \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

Ainsi φ est bien croissante sur l'intervalle précédent, mais $\varphi(0)=0$ donc $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$, et on a bien l'inégalité demandée.

(3) On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et d'équation caractéristique $q^2-3q-4=0$ donc les racines sont $q=-1$ et $q=4$. Il suit qu'il existe deux réels λ,μ tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$w_n=\lambda(-1)^n+\mu 4^n.$$

On détermine ensuite les valeurs de λ et μ à l'aide des deux premiers termes. En injectant, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu&=&1\\-\lambda+4\mu&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\mu&=&1/5\\\lambda&=&4/5\end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $w_n=\dfrac{1}{5}\left(4^n+4(-1)^n\right)$.

(4) On montre la convergence en travaillant sur le terme général ou directement sur la suite des sommes partielles:

$$\begin{array}{rcl}(i)\ \dfrac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}&=&4(n^2+2n+1)\left(\dfrac{-2}{5}\right)^n\\&=&4(n(n-1)+3n+1)\left(\dfrac{-2}{5}\right)^n\\&=&\dfrac{16}{25}n(n-1)\left(\dfrac{-2}{5}\right)^{n-2}+\dfrac{(-24)}{5}n\left(\dfrac{-2}{5}\right)^{n-1}+4\left(\dfrac{-2}{5}\right)^n\end{array}$$

et on reconnait une combinaison de séries géométriques (dérivées) de raison $(-2/5)$ donc convergentes. Ainsi, notre série converge et sa somme est égale à la combinaison des sommes des séries susmentionnées. On obtient donc

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}&=&\dfrac{16}{25}\times\dfrac{2}{\left(1+\frac{2}{5}\right)^3}-\dfrac{24}{5}\times\dfrac{1}{\left(1+\frac{2}{5}\right)^2}+4\times\dfrac{1}{1+\frac{2}{5}}\\&=&\dfrac{16}{25}\times\dfrac{2\times5^3}{7^3}-\dfrac{24}{5}\times\dfrac{5^2}{7^2}+4\times\dfrac{5}{7}\\&=&\dfrac{160-840+980}{7^3}\\&=&\dfrac{300}{7^3}.\end{array}$$

$$(ii)\ \sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Ici, on calcule explicitement la somme partielle, comme somme télescopique, et on passe à la limite.

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)&=&\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\&=&\displaystyle\sum_{j=4}^{n+2}\frac{1}{\sqrt{j}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\&=&\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}&-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{array}$$

La série est donc convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(5) Il y a $\binom{4}{2}=6$ paires de dames différentes dont 3 avec la dame de trèfle. On distingue alors deux cas :
- la main contient la dame de trèfle; auquel cas il faut choisir un deuxième trèfle parmi les 7 restants (7 choix) et une quatrième carte parmi les cartes qui ne sont ni des dames ni des trèfles (21 choix), on a donc $3\times 7\times 21=21^2=441$ choix dans ce cas;
- la main ne contient pas la dame de trèfle. On complète donc notre main avec le choix de 2 trèfles parmi 7 ($\binom{7}{2}=21$) et on a donc $3\times 21=63$ choix.

Bilan, on a $441+63=504$ mains correspondant à la configuration demandée.

(6) Ce groupe ne pourra pas choisir ce restaurant si il y a parmi eux au moins une personne végétarienne qui ne mange pas de fromage.
Introduisons donc les ensembles suivants:

- E l'ensemble de toutes les personnes, on sait que $\mathrm{card}(E)=8$;
- P l'ensemble des gens au régime pescetarien, on a $\mathrm{card}(P)=5$;
- V l'ensemble des végétarien.ne.s, avec $\mathrm{card}(V)=2$;
- $\overline{F}$ l'ensemble des gens qui ne mangent pas de fromage $\mathrm{card}(\overline{F})=4$.

On peut déduire de ce qui précède que $\mathrm{card}(P\cap\overline{F})=1$ ainsi que $\mathrm{card}(V\cap P)=0$ et $\mathrm{card}(V\cap P\cap\overline{F})=0$ (on ne peut pas être pescetarien et végétatien à la fois).

Supposons que $\mathrm{card}(V\cap\overline{F})=0$. Par la formule du crible, on aurait

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(P\cup V\cup\overline{F}) &= \mathrm{card}(P)+\mathrm{card}(V)+\mathrm{card}(\overline{F})\\ &\qquad -\mathrm{card}(P\cap V)-\mathrm{card}(V\cap\overline{F})-\mathrm{card}(\overline{F}\cap P)+\mathrm{card}(V\cap P\cap\overline{F})\\ &= 5+2+4-1\\ &= 10,\end{aligned}$$

ce qui est absurde car $P\cup V\cup\overline{F}\subset E$ et donc $\mathrm{card}(P\cup V\cup\overline{F})\leq 8$.
Ainsi, $\mathrm{card}(V\cap\overline{F})\geq 1$ et le groupe ne peut donc pas choisir ce restaurant.

Exercice 1

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x)=e^x-xe^{1/x}.$$

Partie 1 - Étude de la fonction φ

On **admet** que φ est *dérivable trois fois* sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce qui garantie l'existence de φ', dérivée de φ, celle de φ'', dérivée de φ' et celle de φ''', dérivée de φ''). Enfin, on donne l'encadrement $2<e<3$.

(1) Il faut dériver successivement trois fois la fonction φ, à l'aide des formules de dérivation. On commence par se retrousser les manches. C'est parti! Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= e^x - e^{1/x} - x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\
&= e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{1/x}. \\
\varphi''(x) &= e^x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\
&= e^x - \frac{1}{x^3} e^{1/x} \\
\varphi'''(x) &= e^x + \left(\frac{3}{x^4}\right) e^{1/x} + \left(-\frac{1}{x^3}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \\
&= e^x + \left(\frac{3x+1}{x^5}\right) e^{1/x},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue. Ouf!

(2) Le signe de $\varphi'''(x)$ ne pose aucune difficulté. Les exponentielles sont strictement positives et le quotient l'est aussi pour tout $x > 0$. Ainsi, φ'' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. On voit que

$$\varphi''(1) = e - \frac{1}{1^3} e = 0.$$

On en déduit le signe de $\varphi''(x)$ que l'on présente dans le tableau suivant:

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'''(x)$	‖		$+$		
φ''	‖	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\varphi''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(3) Le signe de $\varphi''(x)$ nous donne les variations de φ'. On constate aussi que $\varphi'(1) = e$. Le tableau est alors le suivant:

x	0		1		$+\infty$
$\varphi''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
φ'	‖	$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, φ' admet e pour minimum sur $]0; +\infty[$, ou encore

$$\forall x > 0, \qquad \varphi'(x) \geq e.$$

(4) Si $\varphi'(x) \geq e$, en particulier $\varphi'(x) > 0$ et la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(5) Lorsque $x \to 0^+$, $1/x \to +\infty$. Il y a *a priori* une forme indéterminée. Mais

$$x e^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{1/x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

par croissance comparée. Par algèbre des limites, on en déduit que $f(x) \to -\infty$, lorsque $x \to 0^+$, et la courbe de φ admet une asymptote verticale en 0.

(6) On utilise une croissance comparée après avoir factorisé par le terme dominant, ici e^x,

$$\varphi(x) = e^x \left(1 - xe^{-x}e^{1/x}\right).$$

Or, xe^{-x} tend vers 0 (croissance comparée) et $e^{1/x}$ tend vers 1 (algèbre des limites). Donc $\varphi(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Maintenant, on compare la croissance de $\varphi(x)$ à celle de x:

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - e^{1/x}.$$

Par croissance comparée, e^x/x tend vers $+\infty$, et on sait aussi que $e^{1/x}$ tend vers 1. Au final, le quotient étudié tend vers $+\infty$ et la courbe de φ présente, en $+\infty$, une branche parabolique de direction verticale.

(7) On donne $15 < \varphi(3) < 16$. Pour montrer l'inégalité souhaitée, il faut (et il suffit) de montrer que $\varphi(x) - ex \geq 0$. Posons alors $\psi(x) = \varphi(x) - ex$ qui, comme φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors,

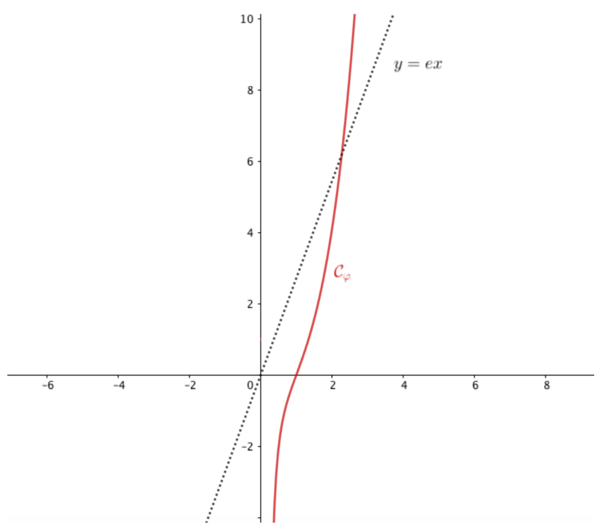
$$\psi'(x) = \varphi'(x) - e \geq 0$$

d'après la Question (3). Donc ψ est croissante sur $]0; +\infty[$ et en particulier sur $[3; +\infty[$. Son minimum sur $[3; +\infty[$ est alors atteint en $x = 3$. Plus précisément,

$$\forall x \geq 3, \quad \psi(x) \geq \psi(3) = \varphi(3) - 3e > 15 - 3e > 15 - 3 \times 3 > 0,$$

ce qui correspond bien à l'inégalité demandée.

(8) On représente la courbe de φ ainsi que la droite $y = ex$ qui sera au dessous de la courbe au moins pour $x \geq 3$.



Partie 2 - Étude de la suite (u_n)

On introduit la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

(9) Procédons par récurrence.

- initialisation. u_0 est naturellement bien défini et $u_0 = 3 \geq 3e^0$, donc la propriété est initialisée.

- <u>hérédité</u> Supposons alors que, pour un certain $n \geq 0$, on ait u_n bien défini et $u_n \geq 3e^n$. En particulier $u_n > 0$ est dans l'ensemble de définition de φ et ainsi, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ existe. Mais de plus, par la Question (7)
$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq eu_n \geq e \times 3e^n = 3e^{n+1},$$
et la récurrence est ainsi terminée.

(10) On montre que la suite est croissante par récurrence. C'est à dire, on montre que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$ et $u_1 = \varphi(u_0) = \varphi(3) \geq 3e$ par la question (7). Or, $3e \geq 3$ donc $u_1 \geq u_0$. Supposons alors que $u_n \leq u_{n+1}$ pour un certain $n \geq 0$. Mais, par croissance de la fonction φ, on a
$$u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq \varphi(u_{n+1}) = u_{n+2},$$
ce qu'on voulait.
Comme $u_n \geq 3e^n$ et que $3e^n \longrightarrow +\infty, \quad n \to +\infty$, il suit, par comparaison que (u_n) diverge vers $+\infty$.

(11) On utilise la minoration de u_n par $3e^n$ pour obtenir
$$\frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{3e^k}$$
puis, on somme pour k entre 0 et n et on utilise la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique (de raison e ici)
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3e^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1-(1/e)^{n+1}}{1-1/e} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1-e^{-(n+1)}}{\frac{e-1}{e}} \\ &= \frac{e-e^{-n}}{3(e-1)},\end{aligned}$$
ce qu'on voulait.

(12) On vient de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \leq \frac{e}{3(e-1)}$$
Ainsi la suite des sommes partielles est majorée. Cette suite étant croissante (c'est une suite de sommes de termes positifs), elle est convergente par application du théorème de convergence monotone. On peut donc bien conclure que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ est convergente.

Exercice 2

Partie 1 - Préliminaires

On considère la suite (H_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0,$$

et que la suite (H_n) est (strictement) croissante.

(2) Soit k compris entre $n+1$ et $2n$. Par décroissance de la fonction inverse on a

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Or, comme

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$

l'encadrement précédent donne

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(3) La suite (H_n) est croissante. Supposons qu'elle ne diverge pas vers $+\infty$, elle est donc convergente vers une limite ℓ (application du théorème de convergence monotone). Mais (H_{2n}) converge également vers ℓ donc

$$H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$$

ce qui est contradictoire avec le fait que cette différence est toujours supérieure ou égale à $1/2$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$

Partie 2 - Étude de suites

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(4)
- Si $p = 0$, alors $\binom{n}{n} = 1$ et (u_n) est constante égale à 1. Il suit que $S_n = 1 + 1 + ... + 1 = n$ et diverge vers $+\infty$.

- Si $p = 1$, alors $u_n = 1/\binom{n+1}{n} = 1/(n+1)$. Il suit alors que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_{n+1} - 1.$$

  Or, on sait que (H_n) diverge vers $+\infty$ par la partie préliminaire. Il suit donc que c'est également le cas pour (S_n).

Dans toute la suite on prend donc $p \geq 2$.

(5) Par définition, on a

$$\begin{aligned}(n+p+2)u_{n+2} &= \frac{n+p+2}{\binom{n+2+p}{n+2}} = \frac{(n+p+2)(n+2)!p!}{(n+p+2)!} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)!p!}{(n+p+1)!} \\ &= \frac{n+2}{\binom{n+p+1}{n+1}} \\ &= (n+2)u_{n+1}.\end{aligned}$$

(6) On procède donc, comme l'énoncé le demande, par récurrence

- initialisation: pour $n = 1$, on a $S_1 = u_1 = 1/\binom{p+1}{1} = 1/p+1$ et, en utilisant la question précédente,
$$\frac{1-(1+p+1)u_2}{p-1} = \frac{1-(p+2)u_2/}{p-1} = \frac{1-2u_1}{(p-1)} = \frac{\frac{(p+1)-2}{p+1}}{p-1} = \frac{1}{p+1}$$
et l'égalité est bien vraie pour $n = 1$.

- hérédité: supposons, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que
$$S_n = \frac{1-(n+p+1)u_{n+1}}{p-1}.$$
Il suit que
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} = \frac{1-(n+p+1)u_{n+1}}{p-1} + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1} - \left(\frac{(n+p+1)}{p-1} - 1\right) u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1} - \frac{(n+2)}{p-1} u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1} - \frac{(n+p+2)u_{n+2}}{p-1} \\ &= \frac{1-(n+1+p+1)u_{n+2}}{p-1}, \end{aligned}$$
ce qui est bien l'égalité au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(7) On pose $v_n = (n+p)u_n$. On calcule la différence de deux termes consécutifs:
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n+1+p}{\binom{n+p+1}{n+1}} - \frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} \\ &= \frac{(n+p+1)p!(n+1)!}{(n+p+1)!} - \frac{(n+p)p!n!}{(n+p)!} \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!} \left((n+1) - (n+p)\right) \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!} (1-p) \\ &< 0 \end{aligned}$$
car $p \geq 2$ et la suite (v_n) est bien décroissante.

(8) Tous les termes de la suite (v_n) sont clairement positifs, la suite est donc minorée par 0 et décroissante; par le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ. Comme tous les termes de la suite sont positifs, par passage à la limite, on a également $\ell \geq 0$.

(9) D'après la Question **??**, on a
$$S_n = \frac{1-(n+p+1)u_{n+1}}{p-1} = \frac{1-v_{n+1}}{p-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-\ell}{p-1}.$$

(10) On suppose que $\ell > 0$. Comme $\ell \neq 0$, on peut diviser par ℓ/n. On a, de manière plus ou moins astucieuse,
$$\frac{u_n}{\ell/n} = \frac{(n+p)u_n}{\ell} \times \frac{n}{n+p}.$$

Or,

$$\frac{(n+p)u_n}{\ell} = \frac{v_n}{/ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1$$

et

$$\frac{n}{n+p} = \frac{1}{1+p/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

ce qui donne bien la limite attendue.
Si $u_n/(\ell/n)$ tend vers 1, il existe un rang N_1 à partir duquel le quotient dépasse $1/2$, *i.e*, pour tout $n \geq N_1$

$$\frac{u_n}{(\ell/n)} \geq \frac{1}{2} \iff u_n \geq \frac{\ell}{2n}.$$

(11) D'après la question précédente, on a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{N_1-1} u_k + \sum_{k=N_1}^{n} u_k \\ &\geq \sum_{k=N_1}^{n} u_k \qquad\qquad (\text{car } u_k \geq 0) \\ &\geq \frac{\ell}{2}\sum_{k=N_1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{\ell}{2}\left(H_n - H_{N_1-1}\right) \end{aligned}$$

Or, H_{N_1-1} est une constante (par rapport à n) et $H_n \to +\infty$. Par comparaison des suites à termes positifs, on a alors que $S_n \to +\infty$ ce qui contredit la convergence de (S_n) obtenue ci-avant. Il suit que $\ell = 0$.

(12) Au final, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{p-1}.$$

Exercice 3

Un livre comporte 14 chapitres. Un étudiant paresseux décide de n'en lire que 3.

(1) Il s'agit du nombre de combinaison de 3 éléments dans un ensemble qui en contient 14 et par définition, ce nombre est

$$\binom{14}{3} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{14\times 13\times 12}{6} = 14\times 13\times 2 = 364.$$

(2) Soit $k \in \{3,4,5,...,14\}$ fixé. Si k est le plus grand des trois numéros, les deux autres numéros sont choisis dans les $k-1$ numéros inférieurs à k. Il y a $\binom{k-1}{2}$ façons de les choisir.

(3) On partitionne l'ensemble des choix de trois chapitres selon le numéro du chapitre avec le numéro le plus grand. Plus précisément, si E représente l'ensemble de tous les choix possibles et E_k l'ensemble des choix de trois chapitres avec k pour plus grand numéro de chapitre, on a

$$E = \bigcup_{k=3}^{14} E_k.$$

Mais par définition des ensembles E_k, il est clair que ceux-ci sont deux à deux disjoints et par conséquent le cardinal de leur réunion s'obtient comme somme des cardinaux. On a donc

$$\binom{14}{3} = \mathrm{card}(E) = \sum_{k=3}^{14} \mathrm{card}(E_k) = \sum_{k=3}^{14} \binom{k-1}{2}.$$

Le changement d'indice $j = k-1$ donne alors

$$\binom{14}{3} = \sum_{j=2}^{13} \binom{j}{2}.$$

(4) On pourrait montrer la formule voulue par un nouvel argument de dénombrement. Malheureusement (ou pas, question de point de vue), on nous demande une démonstration par récurrence (on aurait aussi pu utiliser le triangle de Pascal pour faire apparaître une somme télescopique...). Il faut faire un peu attention ici car il y a deux indices n et p. Il faut savoir faire cette question classique. On a pas peur et on y va.

- Initialisation. Si $n = 1$, le seul choix possible de p est alors $p = 1$ également. On a d'une part, $\binom{n+1}{p+1} = \binom{2}{2} = 1$ et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{1} \binom{k}{p} = \binom{1}{1} = 1.$$

C'est bien égal et la propriété est initialisée.

- Hérédité. Supposons que pour un certain $n \geq 1$ et pour tout p entre 1 et n, on ait

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{p+1}.$$

On veut montrer que

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{p}{k} = \binom{n+2}{p+1}.$$

Pour passer à la propriété au rang $n+1$, il faut distinguer deux cas: p entre 1 et n et $p = n+1$.

  - Si $p = n+1$, alors on veut montrer que

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

Mais dans ce cas, $p+1 = n+2$ et donc le membre de droite de l'égalité précédente vaut 1. Il n'y a qu'un seul terme dans la somme du membre de gauche qui vaut $\binom{n+1}{n+1} = 1$ et la formule est bien vérifiée (sans faire appel à l'hypothèse de récurrence).

  - Si p est entre 1 et n, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\
&= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \qquad \text{(par HR)} \\
&= \binom{n+2}{p+1} \qquad \text{(par le triangle de Pascal)},
\end{aligned}$$

ce qui es bien la formule attendue et termine la récurrence.

Exercice 4

Soient E un ensemble (ayant au moins 3 éléments) et A une partie de E telle que $A \notin \{\emptyset; E\}$. On définit l'application f_A par

$$\begin{array}{rccl} f_A: & E & \longrightarrow & \{0;1\} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

(1) Comme par hypothèse, $A \neq E$, il existe un élément qui n'est pas dans A, c'est à dire $x \notin A$. Cet élément vérifie alors $f_A(x) = 0$. Comme A est non vide, il est composé au moins d'un élément, notons-le a. L'image de cet élément par f_A est alors $f_A(a) = 1$. Ainsi, les deux valeurs à l'arrivée sont atteintes et f_A est surjective.

Pour l'injectivité, on voit que si deux éléments sont dans A, ils seront tous deux envoyés sur 1 sauf si A n'est constitué que d'un seul éléments mais dans ce cas $\overline{A}$ contient au moins deux éléments qui seront tous deux envoyés sur 0 par f_A; l'application n'est pas injective.
N'étant pas injective, elle ne peux pas être bijective.

(2) Par définition de f_A, on a

$$1 - f_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } x \in A \\ 1, & \text{si } x \notin A \end{array} \right. ,$$

ce qui correspond bien à la définition de $f_{\overline{A}}$.

(3) On constate que, si un élément x n'est pas dans A alors $f_A(x) = 0$ donc $f_A(x)f_B(x) = 0$. Même chose si cet élément n'est pas dans B. Or, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$. Mais alors, si $x \in A \cap B$, alors $f_A(x) = f_B(x) = 1$ et donc $f_A(x)f_B(x) = 1$. On en déduit que $f_A f_B = f_{A\cap B}$.

Exercice 5

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(1) On calcule

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 + \dfrac{1}{2^0} = 1 + 1 = 2 \\ u_1 & = & u_0 \times \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \dfrac{3}{2} = 3 \\ u_2 & = & u_1 \times \left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right) = 3 \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{15}{4}. \end{array}$$

(2) L'inégalité se montre facilement par récurrence.
- On vient de voir que $u_0 = 2$ ce qui permet de l'initialiser.

- <u>hérédité</u>. Supposons alors que $u_n \geq 2$ pour un certain $n \geq 0$.
  En constatant que $\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq 1$, on a
  $$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq u_n \geq 2,$$
  et la récurrence est bien démontrée.

(3) L'inégalité obtenue à la question précédente intègre la preuve que la suite (u_n) est croissante.

(4) On a déjà obtenu cette inégalité un bon nombre de fois, notamment dans le cours, au Chapitre 1. On y renvoie donc pour les détails de cette question facile et classique.

(5) Comme $u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 0$, tous les termes sont en particulier strictement positifs et on peut calculer le logarithme de u_n. En combinant les propriétés du log, l'inégalité obtenue à la question précédente ainsi que la formule du calcul d'une somme des termes d'une suite géométrique, on a
$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$
On définit alors
$$v_n = \exp\left(2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$$
ce qui permet d'écrire, pour tout $n \geq 0$,
$$2 \leq u_n \leq v_n.$$
De plus, les limites de référence et la composition des limites permettent d'affirmer que (v_n) converge vers e^2.

(6) On observe aussi que $v_n \leq e^2$. Ainsi, on a que (u_n) est majorée par e^2 tout en étant croissante. Le théorème de convergence monotone permet alors d'affirmer que la suite (u_n) est convergente, vers une limite ℓ. On peut même préciser que l'inégalité précédente permet d'en donner un encadrement:
$$2 \leq \ell \leq e^2.$$