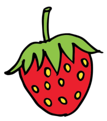
Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.



Concours Blanc n°2

Mercredi 19 Mai
Durée : 4 heures

Une grande importance sera apportée à la présentation, la lisibilité, les efforts de rédaction et la clarté des résultats exposés que l'on demande d'encadrer. Toute copie qui ressemble à un brouillon ne sera pas lue.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-x)^k}{k}.$$

(1) Expliciter les fonctions P_1 et P_2.
(2) Justifier que P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout x différent de -1, on a

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$

(3) En déduire les variations de P_n sur $[0; +\infty[$ et que $P_n(1) < 0$.
(4) Montrer que

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

(5) En déduire, par récurrence, que $P_n(2) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(6) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive x_n et qu'on a

$$1 < x_n \leq 2.$$

(7) Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} \mathrm{d}t.$$

(8) En déduire que

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1} \mathrm{d}t.$$

(9) Montrer que, pour tout $t \geq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.
(10) Déduire des deux questions précédentes que

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}.$$

(11) Conclure quant à la limite de (x_n).

Exercice 2

Une urne contient des boules, indiscernables au toucher, de deux couleurs. Des boules rouges en proportion p (avec $0 < p < 1$) et des boules blanches (en proportion $q = 1 - p$). On effectue des tirages successifs, avec remise, dans cette urne.
On dit que la *première série* est de longueur k si les k premiers tirages ont été d'une même couleur de boule et le $(k+1)-$ème de l'autre couleur. De même la deuxième série commence au tirage suivant la fin de la première série et se termine à un nouveau changement de couleur et ainsi de suite.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note R_j l'évènement "la boule obtenue au $j-$ième tirage est rouge".
On note L_1 la longueur de la première série.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note N_n la variable aléatoire égale au nombre de séries obtenues lors des n premiers lancers.

(1) Déterminer la loi de L_1.
(2) Montrer que L_1 admet une espérance et la calculer.
(3) Même question avec la variance.

Dans toute la suite, on suppose que $p = q = \frac{1}{2}$, c'est à dire que la proportion de boules rouges et celle de boules blanches sont égales.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  (a) Justifier que $N_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
  (b) Calculer les probabilités $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

(5) (a) Déterminer les lois des variables aléatoires N_1 et N_2 et calculer leurs espérances.
  (b) Déterminer la loi de N_3 puis vérifier que $E(N_3) = 2$.

(6) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0; 1]$

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k.$$

La fonction G_n s'appelle *fonction génératrice* de la variable N_n.

  (a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n(0)$ et $G_n(1)$.
  (b) Montrer que $G'_n(1) = E(N_n)$.
  (c) Soit $j \in N_n(\Omega)$. Déterminer, pour tout $k \in N_{n+1}(\Omega)$, en distinguant trois cas, la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{[N_n=j]}(N_{n+1} = k)$.
  (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente, montrer que

$$\forall k \in [\![1; n+1]\!], \quad P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1).$$

  (e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall s \in [0; 1]$,

$$G_{n+1}(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right) G_n(s).$$

  (f) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0; 1]$,

$$G_n(s) = s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

  (g) En déduire, à l'aide de la Question (6b), que

$$E(N_n) = \frac{n+1}{2}.$$

Exercice 3

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_n$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_n$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on note

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

Lorsque $(S_n(A))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^A cette limite.

(1) Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonale, alors e^D existe et vaut $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$.

(2) Dans cette question uniquement, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^2 et A^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer A^k.

(b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(A)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^A.

(3) Dans cette question uniquement , la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^2.

(b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}^*$ l'expression de A^k en fonction de k.

(c) Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante

$$S_n(A) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) A.$$

(d) En déduire que e^A existe et que

$$e^A = I + \frac{e^3 - 1}{3} A.$$

(4) Dans cette question uniquement, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

(a) Déterminer trois vecteurs $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u), \quad \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(v), \quad \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(w).$$

(b) Montrer que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice D de f dans la base (u, v, w) ?

(c) On forme la matrice P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base (u, v, w), c'est à dire la matrice dont les colonnes sont respectivement les coordonnées dans la base canonique de u, v et w. Expliciter P, justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

(d) Vérifier que $D = P^{-1}AP$.

(e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

(f) En déduire une expression de $S_n(A)$ en fonction de n.

(g) Conclure que e^A existe et l'expliciter.