Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Concours Blanc n°2

Solution

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-x)^k}{k}.$$

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, on a

$$P_1(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2}, \qquad P_2(x) = \sum_{k=1}^{4} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}.$$

(2) Étant polynomiale, P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée d'une somme (finie) étant égale à la somme des dérivées, on a

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1} x^j = -\sum_{j=0}^{2n-1} (-x)^j \qquad \text{(on a réindexé par } j = k-1\text{)} \\
&= -\frac{(-x)^{2n} - 1}{-x-1} = \frac{x^{2n} - 1}{x+1} \qquad (\text{car } -x \neq 1.)
\end{aligned}$$

(3) P_n' est du signe de $x^{2n} - 1 = (x^n + 1)(x^n - 1)$ et comme $n > 0$ la fonction $x \to x^n - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 1, on en déduit son signe et par suite celui de la dérivée. Le tableau de variations est le suivant.

x	0		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
P_n	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$, c'est le terme de plus haut degré qui est le terme prépondérant et permet d'obtenir et la limite

$$P_n(x) \sim x^{2n} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right). \end{aligned}$$

(5) On a donc en particulier pour $x = 2$

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right).$$

Et comme

$$-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)\,(n+1)} \geq 0,$$

la suite $(P_n\,(2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors croissante. De plus, $P_1\,(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors, pour tout entier $n \geq 1$, $P_n\,(2) \geq P_1\,(2) \geq 0$.

(6) Sur $]0; 1[$, P_n est strictement décroissante à valeur dans $]P_n(0); 0[$ et ne s'annule pas. Sur $[1; +\infty[$, P_n est strictement croissante (et continue) et réalise une bijection (d'après le théorème du même nom) de $[1; +\infty[$ sur $[P_n(1); +\infty[$. Comme $P_n(0) < 0$, $0 \in [P_n(0); +\infty[$ et admet donc un unique antécédent par P_n, noté x_n.
L'équation $P_n(x) = 0$ admet donc une unique solution strictement positive et celle-ci est bien x_n.
De plus, comme $P_n(1) < 0 = P_n(x_n) \leq P_n(2)$ d'après les questions précédentes et que P_n est bijective et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ (sa bijection réciproque aussi et) on a bien

$$1 < x_n \leq 2.$$

(7) La fonction P_n étant dérivable, c'est une primitive de P_n'. Comme $P_n(0) = 0$, P_n est **la** primitive de P_n' qui s'annule en 0, ou encore, pour tout $x \geq 0$,

$$P_n(x) = \int_0^x P_n'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(8) Par la relation de Chasles, on a, comme $x_n > 1$,

$$0 = P_n(x_n) = \int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t,$$

ou encore

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(9) Si $t = 1$ les deux quantités sont nulles et donc égales et l'inégalité large est vérifiée. Si $t > 1$, alors $t^2 > 1$ (et $t^2 - 1 > 0$) et on a

$$\frac{t^{2n}-1}{t^2-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(t^2\right)^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n,$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

(10) L'inégalité précédente, après avoir remarqué que $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, se traduit par le fait que, pour $t \geq 1$, on a

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq n(t-1),$$

et par croissance de l'intégrale,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \geq \int_1^{x_n} n(t-1)\mathrm{d}t = n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n} = n\frac{(x_n-1)^2}{2}.$$

Avec ce qui précède, on a donc

$$\begin{aligned} n\frac{(x_n-1)^2}{2} &\leq \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t \qquad \left(\text{car } \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t \geq 0\right) \\ &= \ln(2), \end{aligned}$$

ce qui se résume en
$$n\frac{(x_n-1)^2}{2} \leq \ln(2) \Longleftrightarrow (x_n-1)^2 \leq \frac{2\ln(2)}{n}.$$
Mais, $x_n > 1$ donc ceci est équivalent à
$$0 < x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}},$$
ce qui était demandé.

(11) On applique le théorème des gendarmes à l'encadrement précédent donc les extrémités tendent toutes deux clairement vers 0. Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

Exercice 2

Une urne contient des boules, indiscernables au toucher, de deux couleurs. Des boules rouges en proportion p (avec $0 < p < 1$) et des boules blanches (en proportion $q = 1 - p$). On effectue des tirages successifs, avec remise, dans cette urne.
On dit que la *première série* est de longueur k si les k premiers tirages ont été d'une même couleur de boule et le $(k+1)-$ème de l'autre couleur. De même la deuxième série commence au tirage suivant la fin de la première série et se termine à un nouveau changement de couleur et ainsi de suite.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note R_j l'évènement "la boule obtenue au $j-$ième tirage est rouge".
On note L_1 la longueur de la première série.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note N_n la variable aléatoire égale au nombre de séries obtenues lors des n premiers lancers.

(1) Chacune des deux séries est de longueur au moins 1 et peut être arbitraiement longue. On a donc
$$L_1(\Omega) = L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned}
P(L_1 = k) &= P\left(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cup B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k \cap R_{k+1}\right) \\
&= P\left(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1}\right) + P\left(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k \cap R_{k+1}\right) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\
&= \prod_{j=1}^{k} P(R_j) \cdot P(B_{k+1}) + \prod_{j=1}^{k} P(B_j) \cdot P(R_{k+1}) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= p^k q + q^k p
\end{aligned}$$

(2) On sait que L_1 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(L_1 = k)$ converge (absolument). Ici tout est positif, on s'intéresse donc à la convergence sans valeur absolue. Or
$$kP(L_1 = k) = k\left(q \cdot p^k + p \cdot q^k\right) = qp\left(kp^{k-1} + kq^{k-1}\right)$$
et on reconnait une combinaison de termes généraux de séries géométriques dérivées de raisons respectives p et q toutes deux convergentes (car $0 < p, q < 1$). Ainsi, L_1 admet une espérance et
$$\begin{aligned}
E(L_1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} qp\left(kp^{k-1} + kq^{k-1}\right) \\
&= qp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}\right) \\
&= qp\left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = qp\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{p^2}\right) \\
&= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.
\end{aligned}$$

(3) On sait que L_1 admet une variance si et seulement si L_1^2 admet une espérance, ce qui a lieu (par théorème de transfert) si et seulement si la série de terme général $k^2P(L_1 = k)$ converge. Or
$$k^2P(L_1 = k) = k(k-1)P(L_1 = k) + kP(L_1 = k).$$
On sait déjà que la série de terme général $kP(L_1 = k)$ converge (et sa somme vaut $E(L_1)$. De plus,
$$k(k-1)P(L_1 = k) = qp\left(pk(k-1)p^{k-2} + qk(k-1)q^{k-2}\right)$$

et on reconnait une combinaison de termes généraux de séries géométriques dérivées deux fois de raisons respectives p et q toutes deux convergentes (car $0 < p, q < 1$). Ainsi, L_1^2 admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(L_1^2) &= qp^2 \times \frac{2}{(1-p)^3} + pq^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} + E(L_1) \\ &= 2\left(\frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2}\right) + \frac{p}{q} + \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Il suit que L_1 admet une variance et, par König-Huyguens,

$$\begin{aligned} V(L_1) &= E(L_1^2) - E(L_1)^2 = 2\left(\frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2}\right) + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} - \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2} + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2 = \frac{p}{q^2} + \frac{q}{p^2} - 2. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on suppose que $p = q = \frac{1}{2}$, c'est à dire que la proportion de boules rouges et celle de boules blanches sont égales.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) En obtenant toujours la même couleur lors des n tirages, on n'aura qu'une seule série donc $N_n = 1$. Inversement, si chaque lancer donne la couleur opposée au tirage précédent, on aura $N_n = n$. Toutes les situations intermédiaires étant possibles, on a : $N_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

(b) L'évènement $(N_n = 1)$ est réalisé si et seulement si on n'a qu'une seule série lors des n premiers tirages donc

$$(N_n = 1) = (R_1 \cap \cdots \cap R_n) \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_n),$$

ce qui donne par incompatibilité puis par indépendance

$$\begin{aligned} P(N_n = 1) &= P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) + P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) \\ &= P(R_1) \dots P(R_n) + P(B_1) \dots P(B_n) \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

De même, $(N_n = n)$ est réalisé si et seulement si on alterne la couleur à chaque tirage donc :

$$(N_n = n) = (R_1 \cap B_2 \cap R_3 \dots) \cup (B_1 \cap R_2 \cap B_3 \dots),$$

ce qui donne par incompatibilité puis par indépendance :

$$P(N_n = n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(5) (a) On a :

- $N_1(\Omega) = \{1\}$ donc $P(N_1 = 1) = 1$ et $E(N_1) = 1$ (c'est une *loi certaine* ou constante).
- $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
  On a d'après la question précédente
  $$P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \frac{1}{2}$$
  et il suit
  $$E(N_2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

(b) Commençons par voir que $N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
On a, d'après la première question de cette partie,

$$P(N_3 = 1) = P(N_2 = 3) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

On en déduit que

$$P(N_3 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

puis que

$$E(N_3) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

(6) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0;1]$

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k.$$

La fonction G_n s'appelle *fonction génératrice* de la variable N_n.

(a) On a :

- $G_n(0) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)0^k = 0;$
- $G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)1^k = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) = 1$ car $\{(N_n = k) : k \in [\![1; n]\!]\}$ forme un s.c.e.

(b) La fonction G_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a pour tout s de $[0;1]$ (par linéarité de l'opération de dérivation)

$$G_n'(s) = \left(\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)ks^{k-1}$$

On a donc en évaluant en $s = 1$,

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k) = E(N_n).$$

(c) Soit $j \in N_n(\Omega)$. En procédant à un tirage de plus, le nombre de séries peut rester le même (la série en cours continue) ou augmenter de 1 (une nouvelle couleur vient interrompre la série précédente et en commencer une nouvelle). Il suit qu'on peut déjà écrire

$$P_{[N_n=j]}(N_{n+1} = k) = 0, \qquad \text{si } k \notin \{j, j+1\}.$$

Pour que la nombre de séries reste le même, il faut piocher la couleur connue de la série précédente, ce qu'on fait avec probabilité 1/2 donc

$$P_{[N_n=j]}(N_{n+1} = j) = \frac{1}{2}.$$

Enfin, pour commencer une nouvelle série et augmenter le nombre de séries de 1, il faut piocher l'autre couleur que celle (connue) de la série en cours, ce qu'on fait avec probabilité 1/2, donc

$$P_{[N_n=j]}(N_{n+1} = j+1) = \frac{1}{2}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{[N_n = j] :\ j \in [\![1; n]\!]\}$

$$\begin{aligned}
P(N_{n+1} = k) &= \sum_{j=1}^{n} P_{[N_n=j]}(N_{n+1} = k)P(N_n = j) \\
&= P_{[N_n=k-1]}(N_{n+1} = k)P(N_n = k-1) + P_{[N_n=k]}(N_{n+1} = k)P(N_n = k) \\
&= \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1),
\end{aligned}$$

où on a bien utilisé la question précédente pour d'abord supprimer les probabilités conditionnelles nulles et ensuite remplacer les deux qui restaient par 1/2. C'est bien la formule attendue.

(e) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s \in [0;1]$

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n+1}=k)s^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}P(N_n=k)+\frac{1}{2}P(N_n=k-1)\right)s^k \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n=k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n=k-1)s^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_n=k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} P(N_n=i)s^{i+1} \quad \text{car } P(N_n=n+1)=0 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_n=k)s^k + \frac{s}{2}\sum_{i=1}^{n} P(N_n=i)s^{i} \quad \text{car } P(N_n=0)=0 \\
&= \frac{1}{2}G_n(s) + \frac{s}{2}G_n(s)
\end{aligned}$$

Au final, on a

$$G_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2}G_n(s).$$

(f) Montrons ce résultat par récurrence.

- <u>initialisation</u>. Pour $n=1$.
  $G_1(s) = \sum_{k=1}^{1} P(N_1=k)s^k = P(N_1=1)s = s$ et $s\cdot\left(\frac{1+s}{2}\right)^{1-1} = s$ donc la propriété est vraie au rang 1.

- <u>hérédité</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

  $$G_n(s) = s\cdot\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

  Alors, d'après la question précédente :

  $$G_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2}G_n(s) = \frac{1+s}{2}s\cdot\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} = s\cdot\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n},$$

  ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

Le résultat est démontré.

(g) D'après la question 6b, on a $E(N_n) = G_n'(1)$.
Calculons $Gn'(x)$. On a d'après la formule de la question précédente :

$$G_n'(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} + s\cdot(n-1)\frac{1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}.$$

Donc

$$G_n'(1) = \left(\frac{2}{2}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{2}{2}\right)^{n-2} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Ainsi,

$$E(N_n) = \frac{n+1}{2}.$$

Exercice 3

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_n$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_n$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

Lorsque $(S_n(A))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^A cette limite.

(1) Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Comme D est diagonale, le calcul de ses puissances ne pose aucun problème. On a en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.$$

De sorte que

$$S_n(D) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

On reconnait alors sur la diagonale les sommes partielles de trois séries exponentielles de paramètres respectifs a, b et c qui convergent toutes les trois respectivement vers e^a, e^b et e^c. D'après la définition de l'énoncé, on peut donc conclure que e^D existe et vaut bien

$$e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}.$$

(2) Dans cette question uniquement, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) On fait le calcul (sans difficulté!) et on trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = 0.$$

Ainsi, une récurrence immédiate permet d'obtenir $A^k = 0$ pour $k \geq 3$.
Si la récurrence est en effet facile et immédiate, on la fera quand même apparaître *en appréciation avec le niveau de rédaction de la production rendue*:

- Pour $n = 3$, on a bien $A^3 = 0$.
- Si $A^k = 0$ pour un certain $k \geq 3$, alors $A^{k+1} = A \cdot A^k = A \cdot 0 = 0$.

(b) Il suit que, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
S_n(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} A^k \qquad\qquad (\text{car } A^k = 0 \text{ pour } k \geq 3) \\
&= I + A + \frac{1}{2} A^2 \qquad\qquad (\text{car } A^0 = I) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les coefficients de $S_n(A)$ sont constants. et admettent donc chacun une limite en $+\infty$ égale à la valeur de la constante. On peut donc conclure ici que e^A existe et que (pour tout $n \geq 2$)

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_n(A).$$

(3) Dans cette question uniquement , la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$.

(b) On a déjà rencontré quasiment le même exercice lors des révisions de rentrées. Il est relativement naturel de déduire de la relation précédente (sinon, on essaie de calculer d'autres puissances pour se donner l'idée) que, pour tout $k \geq 1$

$$A^k = 3^{k-1} A.$$

On le montre par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $k = 1$, on a bien $A = 3^0 A$.
- <u>hérédité.</u> Si $A^k = 3^{k-1} A$ pour un certain $k \geq 1$, alors

$$A^{k+1} = A \cdot A^k \underset{(\text{HR})}{=} A \cdot 3^{k-1} A = 3^{k-1} A^2 = 3^{k-1} \times 3A = 3^k A,$$

ce qui est bien la relation au rang $k+1$ et termine la récurrence.

(c) On va utiliser la relation précédente pour remplacer A^k dans le calcul de $S_n(A)$. Attention cependant, cette formule n'est valable que pour $k \geq 1$, et la somme définissant $S_n(A)$ commence à $k = 0$. Naturellement, on veut essayer, dans la somme ainsi transformée de faire apparaître une série exponentielle *réelle* de paramètre 3.

$$\begin{aligned}
S_n(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} A^k \\
&= I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 3^{k-1} A = I + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 3^k A \\
&= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!} \right) A \\
&= I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1 \right) A,
\end{aligned}$$

comme demandé.

(d) Chaque coefficient de la matrice $S_n(A)$ est donc égal, selon s'il est sur la diagonale ou non,)

$$1+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}-1\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}-1\right).$$

Comme, en ayant reconnu une somme partielle de série exponentielle, on a

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\left(e^3-1\right),$$

on en conclut que tous les coefficients de $S_n(A)$ admettent une limite. Ainsi, e^A existe et vaut

$$e^A = \begin{pmatrix} 1+\frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & 1+\frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & 1+\frac{e^3-1}{3} \end{pmatrix} = I + \frac{e^3-1}{3}A.$$

(4) Dans cette question uniquement, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

(a) Si $t = (x, y, z)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base canonique, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$t \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}) \iff (f - \lambda\mathrm{id})(t) = 0 \iff f(t) = \lambda t \iff AX = \lambda X \iff (A - \lambda I)X = 0.$

On résout donc les systèmes correspondants pour les trois valeurs de λ données ici (0, puis 1 puis 4).

$$\begin{aligned}
AX = 0 \quad &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x+y+z &=& 0 \\ x+y+3z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ 2z &=& 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -x \\ z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En posant $u = (1, -1, 0)$, on a bien

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u).$$

On continue.

$$\begin{aligned}
AX = X \quad &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} y+z &=& 0 \\ x+z &=& 0 \\ x+y+2z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ y+z &=& 0 \\ x+y+2z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ y+z &=& 0 \\ y+z &=& 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& -z \end{array}\right. \\
&\iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = -z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En posant $v=(1,1,-1)$, on a bien

$$\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})=\mathrm{Vect}(v).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
AX=4X &\iff \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x\\4y\\4z\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}-3x+y+z&=&0\\x-3y+z&=&0\\x+y-z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x+y-z&=&0\\x-3y+z&=&0\\-3x+y+z&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}x+y-z&=&0\\4y-2z&=&0\\4y-2z&=&0\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l}\\L_2\leftarrow L1-L_2\\L_3\leftarrow 3L_1+L_3\end{array}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&z-y=2y-y=y\\z&=&2y\end{array}\right.\\
&\iff X=\begin{pmatrix}y\\y\\2y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En posant $w=(1,1,2)$, on a bien

$$\mathrm{Ker}(f-4\mathrm{id})=\mathrm{Vect}(w).$$

(b) La famille (u,v,w) est une famille constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
\alpha u+\beta v+\gamma w=0 &\iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta+\gamma&=&0\\-\alpha+\beta+\gamma&=&0\\-\beta+2\gamma&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta+\gamma&=&0\\2\beta+2\gamma&=&0\\-\beta+2\gamma&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta+\gamma&=&0\\2\beta+2\gamma&=&0\\6\gamma&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \alpha=\beta=\gamma=0.
\end{aligned}$$

Ainsi la famille est bien libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^3$ grâce à l'argument qui précède.
Par construction de u,v et w dans les noyaux ci-avant, on a

$$f(u)=0,\quad f(v)=v,\qquad f(w)=4w$$

et il suit que la matrice D est la matrice

$$D=\mathrm{Mat}(f,(u,v,w))=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

(c) La matrice P est donc la matrice

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&-1&2\end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont libres : elle est inversible. On calcule son inverse à l'aide d'un pivot de Gauss *simultané*.

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)
&\underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&2&1&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\\
&\underset{L_1\leftarrow 2L_1-L_2,\ L_3\leftarrow 2L_3+L_2}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&-1&0\\0&2&2&1&1&0\\0&0&6&1&1&2\end{array}\right)\\
&\underset{L_2\leftarrow 3L_2-L_3}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&-1&0\\0&6&0&2&2&-2\\0&0&6&1&1&2\end{array}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, (P est bien inversible et)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(d) Le calcul, que l'on omet ici donne bien

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Cette formule est connue sous le nom de formule de changement de base.)

(e) C'est une récurrence facile mais qui ici est demandée explicitement donc qu'on ne néglige pas. Comme $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, comme $A^0 = D^0 = I$, on a bien $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$A^{n+1} = A \cdot A^n \underset{\text{(HR)}}{=} PDP^{-1} \cdot PD^nP^{-1} = PD \cdot D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$

ce qui est bien la relation au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(f) On injecte les résultats précédents, notamment le calcul de $S_n(D)$ pour une matrice D diagonale de la toute première question de cet exercice.

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} PD^nP^{-1} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k\right) P^{-1} = PS_n(D)P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

(g) Le passage à la limite coefficient par coefficient existe, tout comme e^A et donne alors

$$e^A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On pouvait raisonnablement s'arrêter là.