Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°1

Solution

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) En observant que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} 1 = k$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k \sum_{j=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.

(2) Attention, ici le deuxième indice j dépend du premier indice k. On est donc scrupuleux:

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq k \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n \end{cases},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{j-1} 2^k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \frac{1-2^j}{1-2}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(2^{n+1} - 2^j\right) \\
&= n2^{n+1} - \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + 1 \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$

On vérifie la formule par une récurrence rapide.

- <u>initialisation</u>. Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2$. D'autre part, $(1-1)2^2 + 2 = 2$ donc c'est bon.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} = 2n2^{n+1} + 2 \\
&= ((n+1)-1)2^{n+2} + 2,
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine cette récurrence.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n \ln(u_n)$.

(1) On note $f : x \longmapsto x^2 - x\ln(x)$.

(a) L'expression de $f(x)$ comporte du $\ln(x)$ ce qui impose que $x > 0$. Ainsi, $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

(b) En $+\infty$, c'est clairement x^2 qui l'emporte, une factorisation suivie d'un argument de croissance comparée permet donc de conclure:

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

En 0^+, c'est aussi une croissance comparée (en effet $x\ln(x) \to 0$), et on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

(c) On admet donc que f est deux fois dérivables sur $]0; +\infty[$ (c'est assez clair, c'est une combinaison de fonctions usuelles qui sont infiniment dérivables sur l'intervalle susnommé). Les formules de dérivation donnent

$$f'(x) = 2x - \ln(x) - x \times \frac{1}{x} = 2x - \ln(x) - 1$$

et

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$$

(d) On va donc utiliser le signe de $f''(x)$ pour déterminer les variations de f', trouver son minimum (qui s'avèrera positif), conclure au signe de $f'(x)$ et donc aux variations de f en remarquant que

$$f'(1/2) = -\ln(1/2) = \ln(2) > 0.$$

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f'	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$		$+$		
f	$\Vert$ 0		$\nearrow$		$+\infty$

En particulier, f est strictement croissante sur son ensemble de définition. Ce qui sera bien pratique.

(a) C'est une récurrence classique. On vérifie aisément que $u_0 = 1/2$ est bien compris entre $1/2$ et 1. Supposons alors que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $1/2 \leq u_n \leq 1$. Comme f est croissante, on a donc

$$f(1/2) \leq f(u_n) \leq f(1).$$

Or,

$$f(1) = 1, \quad f(u_n) = u_{n+1}$$

et

$$f(1/2) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln(2)\right) > \frac{1}{2} \quad \text{car} \quad \ln(2) \simeq 0,69 > \frac{1}{2}.$$

Au final, on a bien

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1,$$

ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(b) C'est encore une récurrence. On voit que $u_1 = f(u_0) = f(1/2) > 1/2$ d'après la remarque précédente, donc $u_0 \leq u_1$ initialise bien la démonstration. Supposons alors que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$, par croissance de f on aura

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2},$$

ce qui est la propriété au rang $n+1$ et termine donc la récurrence. Ainsi (u_n) est bien croissante.

(c) Par le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge par une limite ℓ. Par passage à la limite dans les inégalités obtenues à la question (2), on a de plus

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

(2) On pose $g(x) = x - \ln(x) - 1$. Cette fonction est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $g'(x) = 1 - 1/x = (x-1)/x$ ce qui permet de dresser son tableau de variations sans difficulté (en remarquant que $g(1/2) = \ln(2) - 1/2 > 0$ et $g(1) = 0$).

x	$1/2$		1
$g'(x)$		$-$	0
g	$g(\frac{1}{2})$	$\searrow$	0

Comme g est strictement décroissante sur $[1/2; 1]$, alors, pour tout $x \in [1/2; 1]$,

$$g(x) > g(1) = 0.$$

En particulier, 1 est l'unique antécédent de 0 par g sur $[1/2; 1]$, ou encore $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

(3) Comme $\ell \in [1/2; 1]$ et que f est continue sur $[1/2; 1]$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, le passage à la limite donne

$$\ell = f(\ell).$$

Mais on constate, comme $\ell > 0$, que

$$\ell = f(\ell) \iff \ell^2 - \ell \ln(\ell) = \ell \iff \ell - \ln(\ell) = 1 \iff g(\ell) = 0 \iff \ell = 1.$$

Exercice 3

On considère les deux suites (S_n) et (T_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n!}.$$

(1) Par définition, $n! = \prod_{k=1}^{n}$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $k \geq 1$. Ainsi,

$$n! = n \prod_{k=1}^{n-1} k \geq n \prod_{k=1}^{n-1} 1 = n.$$

Comme $n \to +\infty$, par principe de comparaison, on a $n! \longrightarrow +\infty$, lorsque $n \to +\infty$.

(2) On vérifie les conditions de la définition de suites adjacentes.

- On étudie le signe de $S_{n+1} - S_n$:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

donc la suite (S_n) est bien croissante. On fait la même chose pour (T_n):

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0 \end{aligned}$$

si $n \geq 1$, et la suite (T_n) est bien décroissante.
- On a $T_n - S_n = 1/n! \geq 0$ donc $T_n \geq S_n$.

- Comme $n! \to +\infty$, par inverse, $T_n - S_n \to 0$.

Les suites (S_n) et (T_n) sont bien adjacentes.

(3) Par théorème des suites adjacentes, (S_n) et (T_n) convergent vers une même limite ℓ. De plus, comme (S_n) est croissante, on a pour tout entier n $S_n \leq \ell$ et comme (T_n) est décroissante, $\ell \leq T_n$, ou encore

$$S_n \leq \ell \leq T_n.$$

(4) On introduit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n et g_n définies sur $[0;1]$ par

$$f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad g_n(x) = f_n(x) - (e-1)\frac{x^n}{n!}.$$

(a) Il est nécessaire de sortir le terme correspondant à $k = 1$ de la somme car il s'agit d'une constante. Il est clair que f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'on a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \\ f'_{n+1}(x) &= e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k.x^{k-1}}{k!} = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{!} \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

On en déduit (les variations de f_n et) le signe de $f_n(x)$ par récurrence:

- <u>initialisation</u>. Pour $n = 0$, $f_0(x) = e^x - 1$. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_0(x) = e^x > 0$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. Et comme $f_0(0) = e^0 - 1 = 0$, on a bien $f_0 \geq 0$ sur $[0,1]$.
- <u>hérédité</u>. Supposons qu'il existe un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n \geq 0$ sur $[0,1]$. Comme $f'_{n+1}(x) = f_n(x) \geq 0$ sur $[0,1]$, f_{n+1} est croissante sur $[0,1]$. Et comme $f_{n+1}(0) = 0$ on a alors $f_{n+1} \geq 0$ sur $[0,1]$, ce qui termine la récurrence.

(b) C'est un raisonnement analogue qu'on applique ici. En effet, g_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(x) &= f'_{n+1}(x) - (e-1)\frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} \\ &= f_n(x) - (e-1)\frac{x^n}{n!} \\ &= g_n(x). \end{aligned}$$

On étudie les variations de g_n par récurrence:

- <u>initialisation</u>. Pour $n = 0$, $g_0(x) = e^x - e$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g_0(1) = 0$ on a bien $g_0 \leq 0$ sur $[0,1]$.
- <u>hérédité</u>. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g_n \leq 0$ sur $[0,1]$. On sait que $g'_{n+1}(x) = g_n(x) \leq 0$ sur $[0,1]$ donc g_{n+1} est décroissante sur $[0,1]$. Et comme

$$g_{n+1}(0) = 0,$$

il suit que $g_{n+1} \leq 0$ sur $[0,1]$ ce qui termine la récurrence sur le signe de $g_n(x)$.

Finalement, on a pour tout entier n et tout $x \in [0,1]$,

$$g_n(x) \leq 0 \Longleftrightarrow f_n(x) \leq (e-1)\frac{x^n}{n!}$$

ce qui donne, en combinant avec la question précédente

$$0 \leq f_n(x) \leq (e-1)\frac{x^n}{n!}.$$

(c) En particulier pour $x = 1$ on obtient pour tout entier n,

$$0 \leq e - S_n \leq \frac{e-1}{n!}$$

(d) Comme $n! \to +\infty$, le théorème des gendarmes donne alors que S_n converge vers e, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Exercice 4

On considère la suite (a_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & -1 \\ a_2 & = & 5 \\ a_{n+3} & = & 3a_{n+2} - 4a_n \end{array}\right.$$

Ce type de suite s'appelle naturellement une *suite récurrence linéaire d'ordre 3*. Sans surprise, on lui associe l'équation

$$(E) \qquad q^3 = 3q^2 - 4.$$

(1) On considère la fonction polynomiale f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

On a bien sûr $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$. Donc -1 est racine de f et $f(x)$ se factorise sous la forme $f(x) = g(x)(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec g fonction polynomiale de degré 2. Une identification ou une division posée donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 4) = (x+1)(x-2)^2.$$

(2) Ainsi, g admet une unique racine $r_0 = 2$.

(3) On **admet** alors qu'il existe des réels α, β et γ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \alpha(-1)^n + (\beta n + \gamma)r_0^n.$$

On injecte les trois valeurs initiales de la suite, pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$. Cela donne le système suivant, qu'on résout par pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \gamma & = & 0 \\ -\alpha + 2\beta + 2\gamma & = & -1 \\ \alpha + 8\beta + 4\gamma & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \gamma & = & 0 \\ 2\beta + 3\gamma & = & -1 \\ 8\beta + 3\gamma & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \gamma & = & 0 \\ 2\beta + 3\gamma & = & -1 \\ \gamma & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & -1 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = (-1)^n + (n-1)2^n.$$