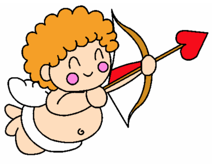
Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.



Devoir Maison n°3

Vacances de Février
Solution disponible en ligne le 21/02

Amuse-bouche

Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 1

On considère trois suites $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ v_0 &= 1 \\ w_0 &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ w_{n+1} &= -u_n - 2v_n + w_n \end{cases}.$$

(1) Déterminer les valeurs de u_1, v_1, w_1 puis u_2, v_2 et w_2.

On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) Calculer $A^2 - 6A$.
(b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que A n'est pas inversible.

(3) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} à l'aide d'un pivot de Gauss simultané.

(4) (a) Vérifier que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
(b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

(c) Expliciter la matrice A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(5) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Quelle est la valeur de X_0?
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$.
(c) Donner les expressions des termes généraux des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.
On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n)\ :\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+2n}=a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+2n}-a=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{x+k}-a.$$

(1) **Étude d'un cas particulier.** Pour cette question seulement, on prend $a=\dfrac{11}{6}$ et $n=1$.
 (a) Expliciter f_1 et dresser son tableau de variations.
 (b) Calculer $f_1(1)$, puis déterminer les racines de (E_1), après avoir écrit l'expression de f_1 sous la forme d'une fraction dont on aura factorisé le dénominateur.

(2) **Dénombrement des racines de (E_n).**
 (a) Dresser le tableau de variations de f_n.
 (b) Justifier l'existence de racines de l'équation (E_n) et en déterminer le nombre.

(3) **La plus grande des racines.** On note x_n la plus grande des racines de (E_n).
 (a) Justifier que $x_n>0$.
 (b) Démontrer que pour tout réel $x>1$,

$$\frac{1}{x}<\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<\frac{1}{x-1}.$$

 (c) À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout $x>0$, on a

$$f_n(x)-\frac{1}{x}+a<\ln\left(1+\frac{2n}{x}\right)<f_n(x)-\frac{1}{x+2n}+a$$

 puis, que

$$a-\frac{1}{x_n}<\ln\left(1+\frac{2n}{x_n}\right)<a-\frac{1}{x_n+2n}.$$

 (d) En utilisant l'inégalité de droite, montrer que pour tout n entier naturel non nul, on a

$$x_n>\frac{2n}{e^a-1}.$$

 (e) Quelle est la limite de x_n, puis la limite de $\ln\left(1+\dfrac{2n}{x_n}\right)$, lorsque n tend vers $+\infty$?
 (f) En déduire que le quotient de x_n par $\dfrac{2n}{e^a-1}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Partie 1 : Étude de f

(1) Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

(2) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Dresser alors le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera, en justifiant, les limites aux infinis.

(3) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

(4) (a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
 (b) Déterminer l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Partie 2 : Étude d'une suite

On considère dans cette partie la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

(5) Déterminer u_1, u_2, u_3.

(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0; 1]$.

(7) Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante. En déduire qu'elles sont toutes les deux convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' qu'on ne précisera pas dans cette question.

(8) (a) Montrer que l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ admet une unique solution dans $]0, 1]$ que l'on précisera.
(b) En déduire que $\ell = \ell'$ puis que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On prélève au hasard ces n boules une par une et sans remise (afin de vider l'urne).
À la suite de cette expérience, on note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, u_i le numéro de la boule obtenue au cours du $i-$ème tirage.
Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a un record au $i-$ème tirage si

$$u_i > \max\{u_1, \ldots, u_{i-1}\},$$

autrement dit, si la boule obtenue au $i-$ème tirage porte un numéro strictement supérieurs aux numéros des boules tirées précédemment. D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement un record à l'instant 1.

Pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, on introduit les événements :

- R_i : "il y a un record au $i-$ème tirage"
- $B_{i,k}$: "la boule obtenue $i-$ème tirage est numérotée k"
- $A_{i,k}$: "la boule obtenue au $i-$ème tirage porte un numéro strictement inférieur à k"

Par convention, on a donc $P(R_1) = 1$.

Exemple. *Si $n = 8$ et que l'on obtient, dans cet ordre, les boules numérotés ②①③⑤④⑥⑧⑦, alors il y a un record aux tirages 1,3,4,6 et 7. Ainsi les événements*

$$R_1,\ R_3\ , R_4\ , R_6\ , R_7\ , B_{1,2}\ , B_{2,1}\ , B_{3,3}\ , A_{3,6}\ , A_{5,6},$$

notamment (ce ne sont pas les seuls), sont réalisés.

On modélise l'expérience par l'ensemble Ω des $n-$uplets de numéros de boules piochées, dont les composantes sont donc deux à deux distinctes et on considère P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

(1) Quel est le cardinal de Ω?
(2) Combien y a-t-il de tirages de n boules successivement sans remise dont la dernière boule est celle numérotée n?
En déduire que $P(R_n) = \dfrac{1}{n}$.

(3) Soit $i \in [\![2, n]\!]$.
(a) Que vaut $P(R_i \cap B_{i,k})$ lorsque $k \in [\![1, i-1]\!]$?
(b) Justifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $R_i \cap B_{i,k} = \left(\displaystyle\bigcap_{j=1}^{i-1} A_{j,k} \right) \cap B_{i,k}$.
(c) Soit $j \in [\![1, i-2]\!]$. Sachant que l'on a déjà pioché j boules avec un numéro strictement inférieur à k, combien en reste-t-il ? Et combien reste-t-il de boules au total ?

En déduire que

$$P(R_i \cap B_{i,k}) = \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}}.$$

(d) Montrer alors que

$$P(R_i) = \frac{1}{i} \sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}.$$

(e) Justifier que

$$\sum_{k=i+1}^{n} \left(\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i} \right) = \binom{n}{i} - 1.$$

(f) En déduire enfin que $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$.

On vient donc de montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$: il y a une chance sur i qu'il y ait un record au $i-$ème tirage.