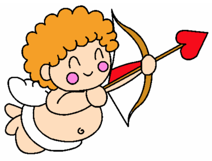
Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.



Devoir Maison n°3

Solution

Amuse-bouche

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^1$ il faut montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est elle-même continue sur $\mathbb{R}$. La fonction étant définie par un raccordement, on travaille séparément : en 0 et ailleurs.

- Sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, f est quotient de combinaisons de fonctions usuelles (polynomiale et exponentielles) qui sont $\mathcal{C}^1$ et dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, elle est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun de ces deux intervalles. Pour $x \neq 0$, on a
$$f'(x) = \frac{(1-x)e^{-x}(1-e^{-x}) - xe^{-2x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{(1-x)e^{-x} - e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2}.$$
- Au voisinage de 0, on a $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 + o(x^2)$ et on peut alors écrire
$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x(1-e^{-x})} \\
&= \frac{x(1-x+o(x)) - 1 + 1 - x + x^2/2 + o(x^2)}{x(1-1+x+o(x))} \\
&= \frac{x - x^2 + o(x^2) - 1 + 1 - x + x^2/2}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\
&= \frac{x^2}{x^2} \times \frac{-1/2 + o(1)}{1 + o(1)} \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$
donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
Il reste à montrer que f' est continue en 0. On a, toujours au voisinage de 0 (observant que $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)$,
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1-x)e^{-x} - e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2} \\
&= \frac{(1-x)(1-x+x^2/2+o(x^2)) - 1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)}{(x+o(x))^2} \\
&= \frac{1 - x + x^2/2 - x + x^2 + o(x^2) - 1 + 2x - 2x^2}{x^2 + o(x^2)} \\
&= \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} = f'(0)
\end{aligned}$$
donc f' est bien continue en 0 et f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc partout sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

On considère trois suites $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 1 \\ w_0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n - 2v_n + w_n \end{array}\right. .$$

(1) On a immédiatement $u_1 = 1 + 2 = 3, v_1 = 2 + 4 = 6$ et $w_1 = -1 - 2 = -3$. Puis, $u_2 = 3 + 12 + 3 = 18, v_2 = 6 + 24 + 6 = 36$ et enfin $w_3 = -2 - 12 - 3 = -18$.

On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) (a) Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -6 \\ 12 & 24 & -12 \\ -6 & -12 & 6 \end{pmatrix} = 6A$$

et il suit immédiatement que $A^2 - 6A = 0$.

(b) Supposons alors que A soit inversible. Il existe alors une matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I$. Mais alors,

$$0 = A^{-1} \cdot 0 = A^{-1}\left(A^2 - 6A\right) = A - 6I$$

ou encore $A = 6I$ ce qui n'est pas vrai du tout! Ainsi, on peut conclure que A n'est pas inversible.

(3) Inversons P par pivot de Gauss simultané.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi, on obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) (a) C'est parti :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui est bien une matrice diagonale comme attendu.

(b) La petite récurrence à savoir faire.

- initialisation. Pour $n = 0$, on a bien
$$A^0 = I = PP^{-1} = PIP^{-1} = PD^0P^{-1}.$$
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \cdot A^n \\ &= PDP^{-1} \cdot PD^nP^{-1} \qquad (\mathbf{HR}) \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}, \end{aligned}$$
ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(c) La matrice D est diagonale, calculer ses puissances est immédiat :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$$
Il suit que, pour tout $n \geq 1$,
$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6^n & 2 \times 6^n & -6^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6^n & 2 \times 6^n & -6^n \\ 2 \times 6^n & 4 \times 6^n & -2 \times 6^n \\ -6^n & -2 \times 6^n & 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) On observe que
$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + 2v_n - w_n \\ 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ -u_n - 2v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$
Naturellement, on a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) C'est une récurrence trèèèèèèèèèès facile. Qu'on fait quand même.
- initialisation. Pour $n = 0$, $A^0X_0 = IX_0 = X_0$ et c'est vérifié.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_n = A^nX_0$. Alors
$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \cdot A^nX_0 \qquad (\mathrm{HR}) \\ &= A^{n+1}X_0, \end{aligned}$$
ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(c) D'après tout ce qui précède, pour $n \geq 1$,
$$\begin{aligned} X_n &= A^nX_0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6^n & 2 \times 6^n & -6^n \\ 2 \times 6^n & 4 \times 6^n & -2 \times 6^n \\ -6^n & -2 \times 6^n & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \times 6^n \\ 6 \times 6^n \\ -3 \times 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$
et on obtient que, pour $n \geq 1$,
$$u_n = 3 \times 6^{n-1}, \quad v_n = 6^n, \quad w_n = -3 \times 6^{n-1}.$$

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.
On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n)\ :\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+2n}=a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+2n}-a=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{x+k}-a.$$

(1) **Étude d'un cas particulier.** Pour cette question seulement, on prend $a=\dfrac{11}{6}$ et $n=1$.

(a) On a

$$f_1(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{11}{6}.$$

La fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;0\}$. Sa dérivée vaut

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2},$$

qui est une quantité strictement négative pour tout x dans l'ensemble de définition. Ainsi, f_1 est strictement décroissante sur chacun des trois intervalles qui forment l'ensemble de définition de la fonction. On a le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
f_1	$-\frac{11}{6}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{11}{6}$

(b) On peut déjà remarquer que, grâce au tableau de variation ci-dessus (et le théorème des valeurs intermédiaires), on est certain qu'il y a 3 racines: une entre -2 et -1, une entre 1 et 0 et une strictement positive. Afin de les déterminer, on commence par exprimer f_1 comme une fraction, c'est à dire qu'on met l'expression précédente au même dénominateur

$$f_1(x)=\frac{-11x^3-15x^2+14x+12}{6x(x+1)(x+2)}.$$

On voit que $f_1(1)=0$. Ainsi, 1 est racine de l'équation. On va factoriser le numérateur (qui est un polynôme de degré 3, en commençant par diviser par $x-1$). On trouve (par identification ou division euclidienne)

$$f_1(x)=\frac{-(x-1)(11x^2+26x+12)}{6x(x+1)(x+2)}.$$

On trouve les deux dernières racines, via calcul du discriminant:

$$\frac{-13-\sqrt{37}}{11}\simeq-1,73\qquad\text{et}\qquad\frac{-13+\sqrt{37}}{11}\simeq-0,63.$$

(On constate bien que tout cela est cohérent avec les remarques précédentes.)

(2) **Dénombrement des racines de** (E_n)**.**

(a) La fonction f_n admet $2n+1$ valeurs interdites, qui sont $0,-1,-2,\ldots,-2n$. Son ensemble de définition s'écrit comme réunion d'intervalles sur chacun desquels la fonction est (continue et) dérivable

$$\mathcal{D}_{f_n}=]-\infty;-2n[\cup]-2n,-2n+1[\cup\cdots\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[.$$

Sa dérivée vaut

$$f_n'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-\ldots-\frac{1}{(x+2n)^2},$$

qui est une quantité strictement négative pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_n}$. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur chacun des intervalles précédents. Il est également facile de déterminer les limites aux différentes extrémités. On a donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	$-2n$	$-2n+1$	$\cdots$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
f_n	$-a \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -a$	

(b) On applique alors le théorème de bijection à la restriction de f_n sur chaque intervalle $]-k,-k+1[$ (pour $1 \leq k \leq 2n$). En effet, cette restriction y étant strictement décroissante et continue, elle réalise une bijection de $]-k;-k+1[$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet par f_n un unique antécédent dans chacun de ces intervalles, fournissant ainsi $2n$ solutions à l'équation $f_n(x) = 0$. De plus, $a > 0$, donc on peut ré-appliquer le raisonnement pour trouver un unique antécédent sur $]0;+\infty[$. Le théorème de bijection appliqué à la restriction de f_n sur $]-\infty,-2n[$ permet de voir que f_n ne passe par par 0 sur cet intervalle. Au total, on a bien $2n+1$ solutions de l'équation.

(3) **La plus grande des racines.** On note x_n la plus grande des racines de (E_n).

(a) D'après la question précédente, il n'y a qu'une seule racine strictement positive, et il y en a toujours une. C'est donc la plus grande des racines, et celle que l'on nomme x_n. Ainsi, $x_n > 0$.

(b) Les inégalités demandées se démontrent en étudiant les fonctions suivantes, pour $x > 1$,

$$\varphi:\ x \mapsto \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \qquad \text{et} \qquad \psi:\ x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1}.$$

Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur l'intervalle concerné. On dresse leurs tableaux de variations, afin d'étudier leurs extremums éventuels.

- Étude de φ: on calcule la dérivée et dresse le tableau de variations

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)} > 0.$$

x	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$	
φ	$-\infty \nearrow 0$	

et l'inégalité de gauche dans l'encadrement est ainsi démontrée.

- Étude de ψ: on calcule la dérivée et dresse le tableau de variations

$$\phi'(x) = -\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)^2} > 0.$$

x	1		$+\infty$
$\psi'(x)$	$\|\|$	$+$	
ψ	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	0

et l'inégalité de droite dans l'encadrement est également démontrée.

(c) On commence par calculer explicitement le même de gauche

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a - \frac{1}{x} + a = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k}.$$

Grâce à la question précédente, on sait que, pour chaque $1 \leq k \leq 2n$, on a

$$\frac{1}{x+k} < \ln \frac{x+k}{x+k-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_n(x) - \frac{1}{x} + a &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k} \\ &< \sum_{k=1}^{2n} \ln \frac{x+k}{x+k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} (\ln(x+k) - \ln(x+k-1)) \\ &= \ln(x+2n) - \ln(x) \qquad \text{(somme télescopique)} \\ &= \ln \frac{x+2n}{x} \\ &= \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. La preuve de la seconde inégalité est en tout point analogue (en utilisant l'inégalité de droite de l'encadrement obtenu) la question précédente). L'inégalité étant vraie pour tout $x > 0$, on l'applique à x_n, ce qui donne immédiatement (sachant que $f_n(x_n) = 0$)

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

(d) En ne regardant que l'inégalité de droite, on a tout de suite

$$\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n} < a,$$

ce qui donne, en passant à l'exponentielle,

$$1 + \frac{2n}{x_n} < e^a,$$

ou encore

$$x_n > \frac{2n}{e^a - 1}.$$

(e) Comme $a > 0$, on a $e^a - 1 > 0$ et la limite du terme de droite de l'inégalité précédente tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par le théorème de comparaison, il suit que x_n tend également vers $+\infty$. Mais alors, le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

permet de conclure que

$$\ln\left(1+\frac{2n}{x_n}\right) \longrightarrow a,\ n \to +\infty.$$

(f) La dernière observation entraîne, par composition par l'exponentielle (qui est continue) que

$$\frac{2n}{x_n} \longrightarrow e^a - 1 \Longleftrightarrow \frac{2n}{e^a-1} \times \frac{1}{x_n} \longrightarrow 1,$$

ce qui veut dire, qu'à l'infini, $\dfrac{2n}{e^a-1}$ es un *équivalent* de x_n; les deux quantités se comportent de la même manière. On notera, et ce sera introduit proprement en deuxième année,

$$x_n \sim \frac{2n}{e^a-1},\ n \to +\infty.$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Partie 1 : Étude de f

(1) f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

et f est bien paire.

(2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction qui ne s'annule pas et qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $1+x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
En $+\infty$, $\sqrt{1+x^2} \to +\infty$ donc $f(x) \to 0$ lorsque x tend vers $+\infty$ par algèbre des limites. Par parité, on peut alors dresser le tableau de variations complet de f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(3) Il est clair, d'après le tableau de variations ci-dessus, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$ et f est bien bornée sur $\mathbb{R}$.

(4) (a) Comme f est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, le théorème de bijection assure qu'elle est bijective de $[0,+\infty[$ dans $]\lim_{+\infty} f, f(0)] =]0,1] = J$.

(b) Pour tout y de l'intervalle $]0,1]$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y \\ &\iff \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} \quad \text{car } y \neq 0 \\ &\iff 1+x^2 = \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $\sqrt{1+x^2}$ et $\frac{1}{y^2}$ en sont éléments.

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

et comme $y \in]0,1]$ alors $1-y^2$ est positif, et que $\surd$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \end{aligned}$$

car $x \geq 0$ et $y > 0$ donc f^{-1} est définie (sur $]0,1]$) par

$$f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Partie 2 : Étude d'une suite

On considère dans cette partie la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

(5) On applique la définition en partant de $u_0 = 0$. On a

$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) = f(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 \\ u_2 &= f(u_1) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ u_3 &= f(u_2) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

(6) Petite récurrence facile, en utilisant les résultat de la Partie 1 (notamment le fait que f est bornées à valeurs dans $]0,1]$).

- initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 \in [0;1]$.

- hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in [0;1]$. Alors, d'après la Partie 1
$$0 \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq 1$$
et on a encore $u_{n+1} \in [0;1]$ ce qui termine cette très courte et très facile récurrence.

(7) Commençons par observer que pour calculer les termes des suites de rangs pairs ou impairs, on va de *deux en deux* donc on applique deux fois f. C'est à dire qu'on applique $f \circ f$.

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(u_{2n}).$$

Sur $[0;1]$ (où vivent les termes de la suite), la fonction f est décroissante, mais la fonction $f \circ f$ est elle croissante ! Ce qui va permettre de faire une récurrence pour les variations des deux suites et de garantir leur monotonie. Plus précisément

$$(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \times f'(x).$$

Or, on sait que, sur $[0;1]$, $f'(x) \leq 0$ mais comme $f(x) \in]0;1]$, $f'(f(x)) \leq 0$ également et par produit $(f \circ f)'(x) \geq 0$ et donc $f \circ f$ est croissante sur $[0;1]$.

(i) Montrons que (u_{2n}) est croissante (par récurrence).

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a
$$u_0 = 0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = u_2$$
et la propriété est bien vérifiée.
- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{2n} \leq u_{2(n+1)}$. Alors, par croissance de $f \circ f$ sur $[0;1]$ dont tous les termes de la suite sont éléments, on a
$$u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n}) \leq (f \circ f)(u_{2(n+1)}) = u_{2(n+2)},$$
ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(ii) On montre de même que (u_{2n+1}) est décroissante.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a
$$u_1 = 1 \geq \sqrt{\frac{2}{3}} = u_3$$
et la propriété est bien vérifiée.
- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{2n+1} \geq u_{2(n+1)+1}$. Alors, par croissance de $f \circ f$ sur $[0;1]$ dont tous les termes de la suite sont éléments, on a
$$u_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(u_{2n+1}) \geq (f \circ f)(u_{2(n+1)}) = u_{2(n+2)+1},$$
ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par 1, elle converge donc vers une certaine limite $\ell \in [0;1]$ par application du théorème de convergence monotone. De même, la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée (par 0), elle converge donc vers une certaine limite $\ell' \in [0;1]$.
Attention, *a priori* rien ne garantit à ce stade que les deux limites sont les mêmes. On va devoir le montrer.

(8) (a) On résout. Soit $x \in]0;1]$.
$$\begin{aligned} f(x) = f^{-1}(x) &\iff \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\iff (1-x^2)(1+x^2) = x^2 \iff x^4 + x^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation bi-carrée qu'on sait donc résoudre. On pose $y = x^2$.
$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 1 = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ y^2 + y - 1 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ y &=& \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array} \right. \qquad (\text{car } y = x^2 \geq 0) \\ &\iff x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \qquad (\text{car } x \geq 0) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ admet pour unique solution dans $]0,1]$ $x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

(b) Comme $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$, que $u_{2n} \to \ell$, $u_{2(n+1)} \to \ell$ et que f est continue sur $[0;1]$ (intervalle où se trouve ℓ), le passage à la limite donne
$$\ell = f \circ f(\ell)$$
ou encore, en composant par f^{-1}
$$f^{-1}(\ell) = f(\ell).$$

Ainsi, par la question précédente, on a nécessairement $\ell = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Le même raisonnement donne aussi que

$$\ell' = \ell = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Les deux sous-suites de rangs pairs et impairs convergent vers la même limite, on peut conclure que la suite converge vers cette limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On prélève au hasard ces n boules une par une et sans remise (afin de vider l'urne).
À la suite de cette expérience, on note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, u_i le numéro de la boule obtenue au cours du $i-$ème tirage.
Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a un record au $i-$ème tirage si

$$u_i > \max\{u_1, \dots, u_{i-1}\},$$

autrement dit, si la boule obtenue au $i-$ème tirage porte un numéro strictement supérieurs aux numéros des boules tirées précédemment. D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement un record à l'instant 1.

Pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, on introduit les événements :

- R_i : "il y a un record au $i-$ème tirage"
- $B_{i,k}$: "la boule obtenue $i-$ème tirage est numérotée k"
- $A_{i,k}$: "la boule obtenue au $i-$ème tirage porte un numéro strictement inférieur à k"

Par convention, on a donc $P(R_1) = 1$.

Exemple. *Si $n = 8$ et que l'on obtient, dans cet ordre, les boules numérotés ②①③⑤④⑥⑧⑦, alors il y a un record aux tirages 1,3,4,6 et 7. Ainsi les événements*

$$R_1,\ R_3\ , R_4\ , R_6\ , R_7\ , B_{1,2}\ , B_{2,1}\ , B_{3,3}\ , A_{3,6}\ , A_{5,6},$$

notamment (ce ne sont pas les seuls), sont réalisés.

On modélise l'expérience par l'ensemble Ω des $n-$uplets de numéros de boules piochées, dont les composantes sont donc deux à deux distinctes et on considère P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

(1) Ω est l'ensemble des $n-$uplets ordonnées d'éléments choisis parmi $[\![1, n]\!]$ sans répétition.
Pour la première boule, on a n choix, pour la seconde $n-1$, pour la troisième $n-2$... et pour la dernière un seul choix. Au final, il y a $n!$ éléments dans Ω.

C'est aussi le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$.

(2) On répète le même raisonnement que dans la questions précédente, mais les $n-1$ piochées (sans remise) sont à choisir parmi les boules numérotées de 1 à $n-1$. Et pour la dernière, on veut la boule numérotée n donc il y a un seul choix pour celle-ci. Au final, il y a $(n-1)!$ tirages correspondant à la situation demandée.

R_n est réalisée si et seulement si le $n-$ième tirage est un record ce qui arrive si et seulement si la $n-$ième boule piochée a un numéro strictement supérieur à tous les autres ce qui se produit si et seulement si la

$n-$ième boule piochée porte le numéro n. D'après ce qui précède, il y a $(n-1)!$ tirages pour lesquels cette boule sort en dernier et $n!$ tirages en tout, on a donc bien

$$P(R_n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

(3) Soit $i \in [\![2, n]\!]$.

(a) Soit $k \in [\![1, i-1]\!]$. Si $R_i \cap B_{i,k}$ est réalisé, alors il y a un record au $i-$ème tirage en obtenant la boule numérotée k. Dans ce cas, les $i-1$ premières boules portent toutes un numéro strictement inférieur ou égal à k si bien que, même dans le meilleur des cas où on aurait les $i-1$ plus petits numéros (donc de 1 à $i-1$), il faut que $k > i-1$. Ce n'est pas le cas donc $R_i \cap B_{i,k} = \emptyset$ et donc $P(R_i \cap B_{i,k}) = 0$.

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. L'événement $R_i \cap B_{i,k}$ est réalisé si et seulement si il y a un record au $i-$ème tirage en obtenant la boule numérotée k si et seulement si les boules obtenues aux $i-1$ premiers tirages ont un numéro inférieur strictement à k et celle au $i-$ème tirage porte le numéro k. On a donc

$$R_i \cap B_{i,k} = \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_{j,k} \right) \cap B_{i,k}.$$

(c) Soit $j \in [\![1, i-2]\!]$. Sachant que l'on a déjà pioché j boules avec un numéro strictement inférieur à k, il reste $n-j$ boules dont $k-1-j$ avec un numéro strictement inférieur à k.
Appliquons la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(R_i \cap B_{i,k}) &= P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_{j,k} \right) \cap B_{i,k} \right) \\
&= P(A_{1,k}) P_{A_{1,k}}(A_{2,k}) P_{A_{1,k} \cap A_{2,k}}(A_{3,k}) \ldots P_{A_{1,k} \cap \cdots \cap A_{i-2,k}}(A_{i-1,k}) P_{A_{1,k} \cap \cdots \cap A_{i-1,k}}(B_{i,k}) \\
&= \frac{k-1}{n} \times \frac{k-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{k-1-(i-2)}{n-(i-2)} \times \frac{1}{n-(i-1)}
\end{aligned}$$

d'après la question précédente. Ainsi

$$P(R_i \cap B_{i,k}) = \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}}.$$

(d) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(B_{i,1}, \ldots, B_{i,n})$:

$$P(R_i) = \sum_{k=1}^{n} P(R_i \cap B_{i,k}) = \sum_{k=1}^{i-1} P(R_i \cap B_{i,k}) + \sum_{k=i}^{n} P(R_i \cap B_{i,k}) = 0 + \sum_{k=i}^{n} \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}}.$$

Ensuite, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = \frac{\frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!}}{\frac{n!}{i!(n-i)!}} = \frac{i!}{(i-1)!} \times \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}} = i \times \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}}.$$

On en déduit que

$$P(R_i) = \frac{1}{i} \sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}.$$

(e) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=i+1}^{n} \left(\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i} \right) = \binom{n}{i} - \binom{i}{i} = \binom{n}{i} - 1.$$

(f) La formule du triangle de Pascal entraîne alors que

$$\sum_{k=i+1}^{n} \binom{k-1}{i-1} = \binom{n}{i} - 1.$$

donc
$$\sum_{k=i}^{n} \binom{k-1}{i-1} = \binom{n}{i} - 1 + \binom{i-1}{i-1} = \binom{n}{i}.$$
En divisant, on obtient donc
$$\sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = 1$$
et donc $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$.

On vient donc de montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$: il y a une chance sur i qu'il y ait un record au $i-$ème tirage.