Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison

Vacances d'Avril
Solution disponible en ligne le 17/04

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \qquad f\,(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$

(1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que, pour tout $t > 0$, $g\,(t) = \dfrac{e^t}{t}$.

- (a) Justifier que g admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. On note G l'une d'entre elles.
- (b) Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f\,(x)$ à l'aide de la fonction G.
- (c) Déduire de la question précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'\,(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
- (d) Calculer $f\,(1)$.

(2)
- (a) Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f\,(x) \geq e\ln(x)$.
- (b) En déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f\,(x)$.

(3)
- (a) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1]$, l'inégalité $f\,(x) \leq e^x \ln(x)$.
- (b) En déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f\,(x)$.

(4) Dresser le tableau de variation de f.

(5) On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

- (a) Jusfitifer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f''\,(x)$.
- (b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A et déterminer les coordonnées du point A.
- (c) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.
- (d) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.

(6)
- (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant
$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = n.$$
- (b) En utilisant les variations de la fonction f, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
- (c) Déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x.$$

(1) (a) Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \to xe^{-x^2}$.
(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}.$$

(b) En déduire la limite de I_n et celle de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

(1) Déterminer, en justifiant, le rang de f. Quelle est alors la dimension de Ker(f) ? L'endomorphisme f est-il bijectif ?

(2) Déterminer une base (u_1, u_2) de Ker(f) ?

(3) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_3 = (0,1,1,0) \quad u_4 = (1,0,0,1).$$

On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{C}$, notée T.
(c) On note P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées respectives, dans la base $\mathcal{B}$, des vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4.
Expliciter P, justifier qu'elle est inversible et déterminer, par un pivot de Gauss simultané, P^{-1}.
(d) Vérifier par le calcul qu'on a $A = PTP^{-1}$.

(4) (a) Calculer A^2, A^3, puis vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$.
(b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

(5) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n.
(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n.

(6) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec probabilité p et *Face* avec probabilité $q = 1 - p$. On admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
On dit que le $k-$ième lancer est un *changement* s'il amène un résultat différent du $(k-1)-$ième lancer.
On introduit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les évènements :

- P_k (resp. F_k) "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k-$ième lancer;
- Z_k "il y a un changement au $k-$ième lancer (avec $k \geq 2$);
- $X_{n,k}$ "il y a k changements au cours des n premiers lancers" (avec $0 \leq k \leq n-1$) et $n \geq 1$)

(1) Exprimer à l'aides des P_i et F_i les évènements Z_2 et Z_3.
En déduire les valeurs de $P(Z_2)$ et $P(Z_3)$.

(2) Dans cette question uniquement on suppose que $n = 2$.
Déterminer rigoureusement $P(X_{2,k})$ pour $k = 0$ et $k = 1$.

(3) Dans cette question uniquement on suppose que $n = 3$.
Déterminer rigoureusement $P(X_{3,k})$ pour $0 \leq k \leq 2$.

(4) Dans toute la suite on suppose $p \neq q$.

(a) Montrer rigoureusement que $P(X_{n,0}) = p^n + q^n$.
(On commencera par décrire $X_{n,0}$ avec des intersections de P_i et F_i.)

(b) Justifier que

$$X_{n,1} = \bigcup_{j=1}^{n-1} \left(\left[\left(\bigcap_{k=1}^{j} P_k \right) \cap \bigcap_{k=j+1}^{n} F_k \right] \cup \left[\left(\bigcap_{k=1}^{j} F_k \right) \cap \bigcap_{k=j+1}^{n} P_k \right] \right).$$

En déduire la valeur de $P(X_{n,1})$.

(c) En distinguant n pair et n impair, déterminer $P(X_{n,n-1})$.