Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison

Solution

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t.$$

(1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que, pour tout $t > 0$, $g(t) = \dfrac{e^t}{t}$.

(a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelles continues (exponentielle et polynomiale) dont le dénominateur ne s'annule pas. Par le théorème fondamental de l'analyse, g admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.
On note G l'une d'entre elles.

(b) Soit $x > 0$. On a

$$f(x) = \int_1^x g(t)\mathrm{d}t = [G(t)]_1^x = G(x) - g(1).$$

(c) f s'exprime à l'aide de G qui est dérivable (et même $\mathcal{C}^1$) car c'est une primitive de fonction continue, sur $\mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout $x \geq 1$,

$$f'(x) = G'(x) = g(x) = \frac{e^x}{x} > 0.$$

(d) Par définition de l'intégrale, $f(1) = \displaystyle\int_1^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$.

(2) (a) Soit $x \geq 1$ fixé. Pour tout $t \in [1, x]$, on a, par croissance de l'exponentielle

$$\frac{e^t}{t} \geq \frac{e}{t}.$$

Par croissance de l'intégrale (avec des bornes dans le sens croissant), on peut écrire

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t \geq \int_1^x \frac{e}{t}\mathrm{d}t = e[\ln(t)]_1^x = e\ln(x),$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

(b) Cette inégalité étant vraie pour tout $x > 1$, on peut faire tendre $x \to +\infty$ dans le terme de droite. Comme $\ln(x) \to +\infty$, $e > 0$, le principe de comparaison donne

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(3) (a) Soit $x \in]0,1]$ fixé. Observons alors que les bornes de l'intégrale définissant $f(x)$ sont dans le "mauvais sens". Par croissance de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[x,1]$, on a, pour tout $t \in [x,1]$,

$$\frac{e^t}{t} \geq \frac{e^x}{t}$$

et donc

$$-\frac{e^t}{t} \leq -\frac{e^x}{t}.$$

Par croissance de l'intégrale (sur $[x,1]$),

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = -\int_x^1 \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t \\ &\leq -\int_x^1 \frac{e^x}{t}\mathrm{d}t = -e^x[\ln(t)]_x^1 \\ &= e^x \ln(x). \end{aligned}$$

(b) On fait tendre $x \to 0$. Comme $\ln(x) \to -\infty$, et $e^x \to 1$, on a, toujours par principe de comparaison que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

(4) Tous les éléments précédents (notamment le signe de $f'(x)$ permettent de dresser le tableau ci-dessous.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$
f	$\|$	$-\infty \nearrow +\infty$

(5) On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

(a) La dérivée de f est la fonction g introduite précédemment qui est elle même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelles $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, on a

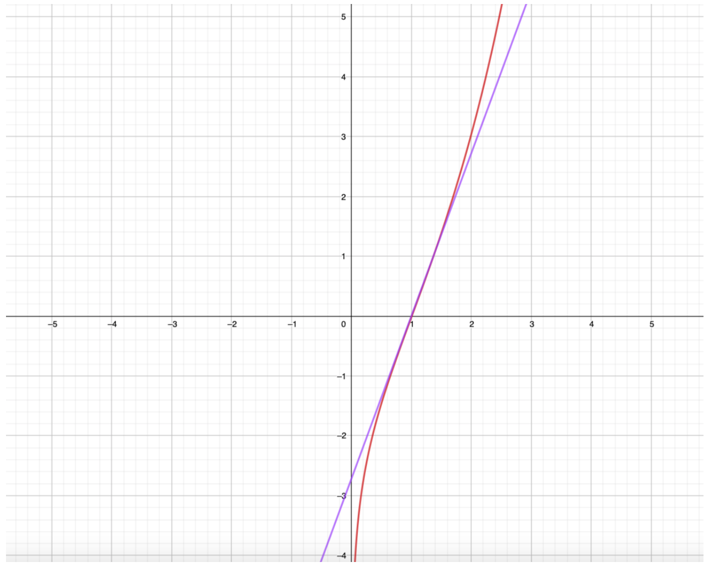
$$f''(x) = g'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

(b) La courbe admet un point d'inflexion en tout point (x,y) tel que $y = f(x)$ et $f''(x)$ s'annule en changeant de signe. On observe que $f''(x)$ s'annule en changeant de signe uniquement pour $x = 1$. Donc le point A, de coordonnées $(1,0)$ est point d'inflexion de la courbe.

(c) En A, la courbe a pour tangente la droite d'équation

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = ex - e.$$

(d) On fait bien attention à marquer le changement de convexité au point d'inflexion (on passe dessous la tangente à dessus).



(6) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On cherche donc un (unique) antécédent de n par f.
f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc réalise une bijection (par le théorème de la bijection) de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On note alors f^{-1} la bijection réciproque, qui a le même sens de variations que f.

En particulier, n admet un unique antécédent par f sur $\mathbb{R}_+^*$ noté u_n. On peut écrire

$$f(u_n) = n \iff u_n = f^{-1}(n).$$

(b) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n+1$ et que f^{-1} est croissante, on a

$$u_n = f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+1) = u_{n+1}$$

et la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

(c) Du fait que $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, on déduit que $f^{-1}(y) \to +\infty$, $y \to +\infty$. Ainsi

$$u_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x.$$

(1) (a) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $[0;1]$ par composition de fonctions usuelles dérivables (polynomiale et exponentielle) sur ce même intervalle. La fonction $x \mapsto x$ est également polynomiale donc dérivable sur $[0;1]$. Par produit, $\varphi :\ x \mapsto xe^{-x^2}$ est dérivable sur $[0;1]$. Pour $x \in [0;1]$, on a

$$\varphi'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}.$$

Il découle le tableau de variations suivant

x	0		$1/\sqrt{2}$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	$1/\sqrt{2e}$	$\searrow$	e^{-1}

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$, on a $(1-x)^n \geq 0$, donc

$$0 \leq xe^{-x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}} \implies 0 \leq xe^{-x^2}(1-x)^n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}(1-x)^n.$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant), on a

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}} \int_0^n (1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2e}} \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2e}} \times \frac{1}{n+1}.$$

On a bien, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(c) Par théorème des gendarmes, il est clair que $J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Posons, pour $x \in [0;1]$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & (1-x)^n \\ v(x) & = & e^{-x^2} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u(x) & = & -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \\ v'(x) & = & -2xe^{-x^2} \end{array} \right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties. On a

$$\begin{array}{rcl} I_n & = & \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\left[-\frac{e^{-x^2}(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^{n+1} \mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}; \end{array}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(b) Comme on sait que $J_n \to 0$, il en est de même pour J_{n+1} et par algèbre des limites, $I_n \to 0$. Observant que $n/(n+1) \to 1$, en multipliant par n on a

$$nI_n = \frac{n}{n+1} - \frac{2n}{n+1} J_{n+1} \longrightarrow 1, \; n \to +\infty.$$

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

(1) Notons, pour $i \in [\![1,4]\!]$, C_i la i−ème colonne de A (qui correspond aux coordonnées de $f(e_i)$ dans $\mathcal{B}$). Il est clair que $C_3 = C_2$ et que $C_2 + C_4 = C_1$, donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2)).$$

Les deux premières colonnes étant clairement non colinéaires, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre et forme une base de $\mathrm{Im}(f)$ qui est donc de dimension 2. Ainsi, $\mathrm{rg}(f) = 2$.
Par théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$.
Naturellement, n'ayant pas un rang total (ou ayant un noyau non réduit au vecteur nul), l'endomorphisme n'est pas bijectif.

(2) On résout l'équation de noyau. Et on rédige comme ça.

$$\begin{aligned}
u=(x,y,z,t)\in \mathrm{Ker}(f) &\iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=0\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+t &=& 0\\ x+y+z &=& 0\\ x+y+z &=& 0\\ x+t &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -t\\ y &=& t-z\end{array}\right.\\
&\iff u=(-t,t-z,z,t)=t(-1,1,0,1)+z(0,-1,1,0), \qquad t,z\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En posant $u_1=(-1,1,0,1)$ et $u_2=(0,-1,1,0)$, on peut écrire

$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2),$$

ainsi la famille (u_1,u_2) est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires, la famille forme une base du noyau.

(3) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_3=(0,1,1,0)\quad u_4=(1,0,0,1).$$

On note $\mathcal{C}=(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

(a) La famille $\mathcal{C}$ est constituée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est un espace vectoriel de dimension 4. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base.
Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
au_1+bu_2+cu_3+du_4=0 &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -a+d &=& 0\\ a-b+c &=& 0\\ b+c &=& 0\\ a+d &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 0\\ b+c &=& 0\\ -b+c+d &=& 0\\ b-c+d &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 0\\ b+c &=& 0\\ 2c+d &=& 0\\ -2c+d &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a-b+c &=& 0\\ b+c &=& 0\\ 2c+d &=& 0\\ 2d &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff a=b=c=d=0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{C}$ est bien libre et forme une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Il faut commencer par exprimer les images par f des quatre vecteurs de $\mathcal{C}$, qu'on ne manque pas d'exprimer en fonction des vecteurs de $\mathcal{C}$. Comme u_1 et u_2 ont été choisis dans le noyau de f, on a immédiatement

$$f(u_1)=f(u_2)=0.$$

De plus,

- $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_3)=2u_3$.
- $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ donc $f(u_4)=2u_4+u_3$.

Ceci permet d'écrire

$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) On note P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées respectives, dans la base $\mathcal{B}$, des vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4.
La matrice P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. Elle vaut

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes étant libres (ce sont les coordonnées d'une base de $\mathbb{R}^4$) P est bien entendu inversible. Un pivot simultané nous permet d'inverser P.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc, $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) On omet le détail mais on trouve bien $A = PTP^{-1}$, ce qui correspond à la formule de changement de base.

(4) (a) C'est un calcul.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On constate qu'on a bien

$$\begin{aligned}
4A^2 - 4A &= 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= A^3.
\end{aligned}$$

(b) Procédons donc par récurrence en construisant les termes de la suite de proche en proche.

- initialisation. Pour $n = 1$, $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$. En posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, la relation est vraie pour $n = 1$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$. Il suit que

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \cdot A^n \\
&\underset{\text{H.R}}{=} A\left(a_n A^2 + b_n A\right) \\
&= a_n A^3 + b_n A^2 \\
&= a_n(4A^2 - 4A) + b_n A^2 \\
&= (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A.
\end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$, on a bien

$$A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A,$$

et la récurrence est terminée.

(5) (a) Soit $n \geq 1$. D'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= 4a_{n+1} + b_{n+1} \\
&= 4a_{n+1} - 4a_n
\end{aligned}$$

et la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.

(b) On associe à la suite son équation caractéristique $q^2 - 4q + 4 = 0$ qui admet une unique solution $q = 2$. D'après le cours, on peut alors affirmer qu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$a_n = (\lambda + \mu n)2^n.$$

Pour déterminer λ et μ, on injecte les valeurs des deux premières termes : $a_1 = 0$ et $a_2 = 4a_1 + b_1 = 1$ ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2(\lambda + \mu) &=& 0 \\ 4(\lambda + 2\mu) &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda &=& -1/4 \\ \mu &=& 1/4 \end{array} \right.$$

et on peut conclure que, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{4}(-1 + n)2^n = (n-1)2^{n-2}.$$

(c) Pour tout $n \geq 2$, on a $b_n = -4a_{n-1}$ et donc

$$b_n = -4(n - 1 - 1)2^{n-1-2} = -(n-2)2^{n-1}.$$

On remarque que cette formule est encore valide pour $n = 1$.

(6) En faisant le bilan de ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
A^n &= a_n A^2 + b_n A \\
&= (n-1)2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-2}\left((n-1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \\
&= 2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu. Ouf.

Exercice 4

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec probabilité p et *Face* avec probabilité $q = 1 - p$. On admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
On dit que le $k-$ième lancer est un *changement* s'il amène un résultat différent du $(k-1)-$ième lancer.
On introduit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les évènements :

- P_k (resp. F_k) "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k-$ième lancer;
- Z_k "il y a un changement au $k-$ième lancer (avec $k \geq 2$);
- $X_{n,k}$ "il y a k changements au cours des n premiers lancers" (avec $0 \leq k \leq n-1$) et $n \geq 1$)

(1) Il découle de la définition que

$$Z_2 = P_1 \cap F_2 \cup F_1 \cap P_2$$

$$Z_3 = F_2 \cap P_3 \cup P_2 \cap F_3$$

Il suit, par incompatibilité et indépendances des lancers, que

$$P(Z_2) = P(P_1 \cap F_2 \cup F_1 \cap P_2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = pq + qp = 2pq$$

et, c'est le même calcul, on a aussi

$$P(Z_3) = 2pq.$$

(2) Dans cette question uniquement on suppose que $n = 2$.
On comprend alors qu'après deux lancers, on a pu avoir ou bien deux fois la même face (et donc aucun changement), ou bien deux faces différentes (et donc un changement). On a

$$P(X_{2,1}) = P(P_1 \cap F_2 \cup F_1 \cap P_2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = pq + qp = 2pq,$$

où le calcul s'appuie sur le fait que les deux alternatives ci-dessus sont disjointes et les lancers indépendants. Par complémentarité,

$$P(X_{2,0}) = 1 - P(X_{2,1}) = 1 - 2pq = p^2 + q^2.$$

(3) Dans cette question uniquement on suppose que $n = 3$.
Avec 3 lancers, on peut avoir aucun changement (toujours la même face de la pièce), un changement ou

au plus deux changements.

$$\begin{aligned}
P(X_{3,0}) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cup P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\
&= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\
&= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(P_1)P(P_2)P(P_3) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= q^3 + p^3
\end{aligned}$$

Si on a deux changement, on change de face de la pièce à chaque lancer.

$$\begin{aligned}
P(X_{3,2}) &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cup P_1 \cap F_2 \cap P_3) \\
&= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\
&= P(F_1)P(P_2)P(F_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= qpq + pqp = pq(q+p) = pq \qquad (\text{car } p + q = 1)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$P(X_{3,1}) = 1 - P(X_{3,0}) - P(X_{3,2}) = 1 - pq - q^3 - p^3.$$

(4) Dans toute la suite on suppose $q \neq q$.

(a) Soit $n \geq 2$. Si on a aucun changement on a eu ou bien n *Pile* consécutifs ou bien n *Face* consécutifs. On peut alors écrire

$$X_{n,0} = \left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k \right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k \right).$$

Par incompatibilité puis par indépendance des lancers, on obtient (ce qui généralise les calculs précédents)

$$P(X_{n,0}) = p^n + q^n.$$

(b) L'évènement

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} \left(\left[\left(\bigcap_{k=1}^{j} P_k \right) \cap \bigcap_{k=j+1}^{n} F_k \right] \cup \left[\left(\bigcap_{k=1}^{j} F_k \right) \cap \bigcap_{k=j+1}^{n} P_k \right] \right)$$

est réalisé si et seulement si on a une première série (de *Pile* ou de *Face*) de longueur entre 1 et $n-1$ et une deuxième série avec l'autre face de la pièce, ce qui correspond exactement à l'apparition d'un et d'un unique changement au cours des lancers, ce qui justifie l'égalité de cet évènement avec $X_{n,1}$. Par incompatibilité puis par indépendance,

$$\begin{aligned}
P(X_{n,1}) &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(p^j q^{n-j} + q^j p^{n-j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} p^j q^{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} q^j p^{n-j} \\
&= q^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{p}{q} \right)^j + p^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{q}{p} \right)^j \\
&= q^n \times \frac{p}{q} \times \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1 - \frac{p}{q}} + p^n \times \frac{q}{p} \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1 - \frac{q}{p}} \\
&= q^n \times \frac{p}{q} \times \frac{q}{q-p} \times \left(1 - \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} \right) + p^n \times \frac{q}{p} \times \frac{p}{p-q} \times \left(1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n-1} \right) \\
&= \frac{pq}{q-p} \left(q^{n-1} \left(1 - \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} \right) - p^{n-1} \left(1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n-1} \right) \right) \\
&= \frac{pq}{q-p} \left(q^{n-1} - p^{n-1} - p^{n-1} + q^{n-1} \right) \\
&= \frac{2pq}{q-p} \left(q^{n-1} - p^{n-1} \right).
\end{aligned}$$

(c) S'il y a $n-1$ changements en n tirages, c'est qu'on change de face de la pièce à chaque lancer.

- Si n est **pair**, il y a autant de *Pile* que de *Face*. En écrivant $n = 2m$,

$$X_{n,n-1} = \left[\bigcap_{j=1}^{m} (P_{2j-1} \cap F_{2j})\right] \cup \left[\bigcap_{j=1}^{m} (F_{2j-1} \cap P_{2j})\right]$$

  et le calcul donne

$$\begin{aligned} P(X_{n,n-1}) &= \prod_{j=1}^{m} pq + \prod_{j=1}^{m} qp \\ &= p^m q^m + q^m p^m = 2p^m q^m = 2(pq)^m \\ &= 2(pq)^{n/2} = 2\left((pq)^{1/2}\right)^n \\ &= 2\left(\sqrt{pq}\right)^n \end{aligned}$$

- Si n est **impair**, la face par laquelle on commence est présente une fois de plus. Notant $n = 2m+1$, on a

$$X_{n,n-1} = \left(\left[\bigcap_{j=1}^{m} (P_{2j-1} \cap F_{2j})\right] \cap P_{2m+1}\right) \cup \left(\left[\bigcap_{j=1}^{m} (F_{2j-1} \cap P_{2j})\right] \cap F_{2m+1}\right)$$

  Il suit que

$$\begin{aligned} P(X_{n,n-1}) &= \left(\prod_{j=1}^{m} pq\right) p + \left(\prod_{j=1}^{m} qp\right) q \\ &= p^m q^m p + q^m p^m q = p^m q^m (p+q) = (pq)^m \\ &= (pq)^{(n-1)/2} = \left((pq)^{1/2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\sqrt{pq}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$