# Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

---

## Devoir Maison n°2

*Vacances de Noël*
*Solution disponible en ligne le 01/01*

---

## Exercice 1

*Les questions de cet exercice sont indépendantes*

(1) Trois amis se rendent à un restaurant, chacun avec sa voiture (bonjour l'écologie). Ils confient les clés au voiturier qui les a mélangées avec toutes les autres clés dont le total est égal à $n$. Au moment où ceux-ci paient l'addition, il leur rapporte donc leurs clés, choisies au hasard parmi toutes les clés. Quelle est la probabilité, en fonction de $n$, que chacun des trois amis récupère sa clé ?

(2) On veut photocopier un polycopié de math d'excellente qualité de $n$ pages. Malheureusement un mauvais réglage mélange toutes les feuilles (originales et copies - qu'on ne peut distinguer) dans le bac de sortie. On alors tire au hasard deux feuilles et on regarde les deux numéros de pages correspondantes.
  (a) Combien y a-t-il tirages différents de couples de feuilles ?
  (b) Combien de tirages sont composés d'un orignal et de sa copie?
  (c) Quelle est donc, en fonction de $n$, la probabilité de piocher un original et sa copie ?

## Exercice 2

Le père Noël prépare le chargement de sa hotte d'or en la remplissant de cadeaux provenant de ses sites de fabrication délocalisés dans les pays du Sud où la main d'oeuvre des lutins locaux (parfois mineurs et travaillant dans des conditions qui ne respectent pas vraiment l'esprit de Noël) lui coûte moins cher.

Du haut de son traineau magique, il se déplace aléatoirement entre les quatre usines, numérotées de 1 à 4 selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, l'homme en rouge est sur le site numéro 1 .
- Lorsqu'il se trouve, à un instant donné sur un site, il se déplace à l'instant suivant sur l'un des trois autres sites, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements

- $A_n$: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 1 à l'instant $n$";
- $B_n$: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 2 à l'instant $n$";
- $C_n$: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 3 à l'instant $n$";
- $D_n$: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 4 à l'instant $n$";

et $a_n, b_n, c_n, d_n$ les probabilités correspondantes. En particulier, on a $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

(1) Déterminer $a_1, b_1, c_1$ et $d_1$.
On admet pour la suite que

$$a_2 = \frac{1}{3}, \text{et} \quad b_2 = c_2 = d_2 = \frac{2}{9}.$$

(2) Justifier que, pour tout $n \geq 2$, $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ forme un système complet d'évènements.

(3) (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n)$$

(b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

(c) En explicitant un lien entre $a_n, b_n, c_n$ et $c_n$, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}.$$

(d) Établir alors que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(4) (a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + c_n + d_n)$$

(b) En déduire une relation entre $b_{n+1}$ et $b_n$.

(c) Montrer enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(5) On admet que, pour tout entier naturel $n$, on a

$$c_{n+1} = -\frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad d_{n+1} = -\frac{1}{3}d_n + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = d_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

# Exercice 3

Pour cet exercice, on donne les approximations suivantes

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25$$

et

$$22\ln(3) - 23 \approx 1,17 \qquad \frac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86.$$

**Préliminaire : un polynôme et une étude de signe**

Soit $P(X)=X^3-6X^2+11X-6$.

(1) Vérifier que $P(1)=0$. En déduire une factorisation de $P$.
(2) Justifier que, pour $x\in\mathbb{R}, P\left(\mathrm{e}^x\right)=\mathrm{e}^{3x}-6\mathrm{e}^{2x}+11\mathrm{e}^x-6$.
(3) Justifier qu'on a l'égalité :

$$2\mathrm{e}^{2x}-12\mathrm{e}^x+22-12\mathrm{e}^{-x}=\frac{2\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^x-2\right)\left(\mathrm{e}^x-3\right)}{\mathrm{e}^x}.$$

(4) Résoudre $\mathrm{e}^x-3>0$ sur $\mathbb{R}$.
(5) Déduire des questions précédentes le signe, pour $x\in\mathbb{R}$ de

$$2\mathrm{e}^{2x}-12\mathrm{e}^x+22-12\mathrm{e}^{-x}.$$

**Partie I - Étude d'une fonction**

On pose $v:x\mapsto \mathrm{e}^{2x}-12\mathrm{e}^x+22x+12\mathrm{e}^{-x}$ et $h:x\mapsto\dfrac{1}{v(x)}$.

(6) **Étude de** $v$
  (a) Calculer les valeurs exactes de $v\left(\ln(2)\right)$ et de $v\left(\ln(3)\right)$ en détaillant vos calculs.
  (b) A l'aide des résultats préliminaires, dresser le tableau de variation complet de la fonction $v$.
  (c) En déduire que $v(x)>0$ sur $\mathbb{R}$.

(7) Quel est l'ensemble de définition de $h$ ?
(8) Dresser le tableau de variation complet de $h$.

**Partie II - Étude d'une suite**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=h(u_n)$.

(9) Calculer $u_1$ et justifier que $u_2\leq 1$.
(10) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n\geq 1$, $u_n\in[\ln(2);\ln(3)]$.
(11) Démontrer que $(u_n)$ est décroissante pour $n\geq 1$.
(12) Montrer alors que $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$, avec $\ln(2)\leq\ell\leq\ln(3)$.

# Exercice 4

On lance (indéfiniment) des boules de neige sur la porte d'un voisin grincheux. À chaque tir, la probabilité de toucher la sonnette vaut $p\in]0;1[$. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on note $A_n$ l'évènement "on touche consécutivement deux fois la sonnette pour la première fois avec le $n-$ième lancer". On note $a_n=P(A_n)$.

(1) Déterminer $a_1, a_2$ et $a_3$.
(2) À l'aide d'un système complet d'évènements représentant les premiers lancers, et une formule du cours que l'on nommera, montrer que

$$(\star)\qquad a_{n+2}=(1-p)a_{n+1}+p(1-p)a_n.$$

(3) On note $A$ l'évènement "on touche deux fois de suite la sonnette" et $S=P(A)$.
  (a) Exprimer $A$ à l'aide des $A_n$.
  (b) Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+2}$ en fonction de $S$, $a_1$ et $a_2$.
  (c) En sommant l'égalité $(\star)$ entre 1 et $+\infty$, montrer que $S=1$.
  (d) Que peut-on en conclure?