Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°2

Solution

Exercice 1

(1) Il y a $\binom{n}{3}$ façons de choisir les 3 clés parmi les n confiées au voiturier. Mais comme on distribue ces 3 clés, on doit multiplier ce nombre par le nombre 3! de permutations des trois clés au sein des trois amis. (On peut aussi aller chercher la notion d'arrangement).
Il y a donc $n(n-1)(n-2)$ manières de leur attribuer une clé à chacun. Hélas, une seule de ces distributions attribue à chaque ami la clé de son véhicule. La probabilité cherchée est donc

$$p_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

(2) (a) il y a $2n$ feuilles dans le bac. Le nombre de façons d'en piocher 2 est donc

$$\binom{2n}{2} = \frac{2n\,(2n-1)}{2}.$$

(b) Il y a n originaux et n copies. Il y a n façons de choisir l'original. Une fois l'original choisi, il n'y a qu'un seul choix pour la copie. Il y a donc n tirages pour lesquelles on a un original et sa copie.

(c) La probabilité cherchée est donc égale à

$$p_n = \frac{2n}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}.$$

Exercice 2

Le père Noël prépare le chargement de sa hotte d'or en la remplissant de cadeaux provenant de ses sites de fabrication délocalisés dans les pays du Sud où la main d'oeuvre des lutins locaux (parfois mineurs et travaillant dans des conditions qui ne respectent pas vraiment l'esprit de Noël) lui coûte moins cher. Du haut de son traineau magique, il se déplace aléatoirement entre les quatre usines, numérotées de 1 à 4 selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, l'homme en rouge est sur le site numéro 1 .
- Lorsqu'il se trouve, à un instant donné sur un site, il se déplace à l'instant suivant sur l'un des trois autres sites, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements

- A_n: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 1 à l'instant n";
- B_n: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 2 à l'instant n";
- C_n: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 3 à l'instant n";
- D_n: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 4 à l'instant n";

et a_n, b_n, c_n, d_n les probabilités correspondantes. En particulier, on a $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

(1) Le père Noël quitte l'usine 1 donc il est clair que $a_1 = 0$. En revanche, il peut se retrouver, avec la même probabilité, sur chacun des trois autres sites de fabrication, ainsi

$$b_1 = c_1 = d_1 = \frac{1}{3}.$$

On admet pour la suite que

$$a_2 = \frac{1}{3}, \text{et} \quad b_2 = c_2 = d_2 = \frac{2}{9}.$$

(2) Il n'est pas si trivial de prouver qu'au moment n le père Noël peut se trouver (avec probabilité non nulle) sur chacun des quatre sites. Si on veut faire une démonstration rigoureuse, on doit raisonner par récurrence. A priori, tous les sites sont possibles à atteindre en n déplacements (sauf 1 pour $n = 1$). On note, pour $n \geq 2$, la propriété (H_n) : "tous les sites sont accessibles au moment n".

- initialisation: pour $n = 2$, c'est une conséquence du résultat admis ci-dessus (aucune des probabilités n'est nulle).

- hérédité: supposons (H_n) vraie pour un certain $n \geq 2$. Soit $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Par la formule des probabilités totale (appliquée au *s.c.e* $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ qui en est bien un par [HR]), la probabilité d'être en j au moment $n + 1$ est égale à $1/3$ multiplié par la probabilité d'être en dehors de j au moment n. Aucune de ces probabilité n'est nulle. Ainsi, aucun des évènements $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ n'est vide. Étant deux à deux disjoints et leur réunion formant l'univers (il n'y a que quatre sites possibles), on a bien à nouveau un s.c.e ce qui termine la récurrence.

(3) (a) D'après les arguments énoncés ci-avant, cette question devient facile. On applique la formule des probabilités totales au s.c.e susmentionné. Comme la probabilité de rester sur le même site est nulle et que celles de changer pour un des trois autres sites sont toutes trois égales à $1/3$, on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n) \\ &= \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n) \end{aligned}$$

(b) Pour $n = 0$, on a

$$a_1 = 0 = \frac{1}{3}(b_0 + c_0 + d_0)$$

car $b_0 = c_0 = d_0 = 0$ donc c'est vrai pour $n = 0$. Pour $n = 1$, c'est donné par la propriété admise

$$a_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

car $b_1 = c_1 = d_1 = 1/3$.

(c) Pour $n \geq 2$, $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ forme un s.c.e dont la somme de leurs probabilités fait 1. La formule reste vraie (on le vérifie avec les valeurs mentionnées ci-dessus) pour $n = 0$ et $n = 1$

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1.$$

ce qui s'écrit aussi $b_n + c_n + d_n = 1 - a_n$, donc

$$a_n = \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}a_n.$$

(d) On reconnait ci-dessus une relation de récurrence de une suite arithmético-géométrique pour laquelle on a un schéma d'étude:

- On cherche le point fixe ℓ solution de $\ell = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ell$. On trouve ici $\ell = \frac{1}{4}$.
- La suite $(a_n - \ell)$ est géométrique de raison $(-1/3)$ et de premier terme $a_0 = 1$. Donc, pour tout $n \geq 0$,

$$a_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(a_0 - \frac{1}{4}\right)$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(4) (a) Encore une fois, il faut distinguer le cas $n \geq 2$, pour lequel on applique la formule des probabilités totales au s.c.e $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$, et qui donne immédiatement

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n + c_n + d_n\right),$$

et les cas $n = 0$ et $n = 1$ pour lesquels on vérifie *à la main* que la formule est vraie. Mais c'est un calcul, facile, à faire apparaître mais qu'on omet ici.

(b) Toujours grâce au fait que $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}b_n.$$

(c) C'est encore une relation de type arithmético-géométrique. La seule différence avec précédemment est la valeur du premier terme $b_0 = 0$ qui donne donc l'expression un peu différente

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(5) On admet que, pour tout entier naturel n, on a

$$c_{n+1} = -\frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad d_{n+1} = -\frac{1}{3}d_n + \frac{1}{3}.$$

Les suites (c_n) et (d_n) sont définies par la même relation de récurrence que (b_n) et ont en plus la même premier terme, égal à 0. Leur expression est donc la même et vaut

$$c_n = d_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Remarque. On observe que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{4},$$

ce qui s'interprète comme le fait qu'après un grand nombre de déplacement, le fait que le père Noël se trouve sur l'un des quatre sites de fabrication à la chaîne est équiprobable.
Plus tard (en deuxième année), ceci sera interprété comme une certaine *convergence en loi* vers une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1;4]\!]$.

Exercice 3

Pour cet exercice, on donne les approximations suivantes

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25$$

et

$$22\ln(3) - 23 \approx 1,17 \qquad \frac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86.$$

Préliminaire : un polynôme et une étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

(1) On voit qu'en effet $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Ainsi 1 est racine de $P(X)$ et $X - 1$ divise donc $P(X)$. En posant la division euclidienne, on trouve

$$P(X) = (X-1)(X^2 - 5X + 6) = (X-1)(X-2)(X-3)$$

où on a factorisé le polynôme de degré 2 *via* calcul implicite de son discriminant.

(2) On évalue le polynôme $P(X)$ en e^x. On trouve bien

$$P(e^x) = (e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 11e^x - 6 = e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6.$$

(3) D'après la factorisation précédente, on a

$$P(e^x) = (e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 11e^x - 6 = e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = (e^x - 1)(e^x - 2)(e^x - 3).$$

En multipliant tout par 2 et en divisant par e^x, on obtient

$$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x} = \frac{2\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x - 2\right)\left(\mathrm{e}^x - 3\right)}{\mathrm{e}^x}.$$

(4) Il est clair que $e^x - 3 > 0 \iff e^x > 3 \iff x > \ln(3)$.

(5) La factorisation ci-dessus permet de dresser le tableau de signe de l'expression $A(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}$

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$e^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie I - Étude d'une fonction

On pose $v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22x + 12\mathrm{e}^{-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.

(6) **Étude de** v.

(a) On calcule, avec le plus grand des plaisirs

$$\begin{aligned} v(\ln(2)) &= e^{2\ln(2)} - 12e^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12e^{-\ln(2)} \\ &= e^{\ln(4)} - 12e^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12e^{\ln(1/2)} \\ &= 4 - 24 + 22\ln(2) + 6 \\ &= 22\ln(2) - 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\ln(3)) &= e^{2\ln(3)} - 12e^{\ln(3)} + 22\ln(3) + 12e^{-\ln(3)} \\ &= e^{\ln(9)} - 12e^{\ln(3)} + 22\ln(3) + 12e^{\ln(1/3)} \\ &= 9 - 36 + 22\ln(3) + 4 \\ &= 22\ln(3) - 23 \end{aligned}$$

(b) La fonction v est une combinaison d'exponentielles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, on voit que

$$v'(x) = 2e^{2x} - 12e^{x} + 22 - 12e^{-x} = A(x)$$

et on connait le signe de la quantité $A(x)$ d'après la partie précédente. On en déduit le tableau de variations suivant (remarquant que $v(0) = 1$)

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$v'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
v	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$v(2)$	$\searrow$	$v(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ ont été naturellement obtenues par factorisation du terme prépondérant et croissance comparée.

(c) Les approximations données dans le texte permettent de voir que le minimum de v, atteint en 0, vaut 1 et est strictement positif. Par conséquent, $v(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(7) D'après la question précédente, le dénominateur intervenant dans la définition de h ne s'annule jamais et h est donc définie sur $\mathbb{R}$.

(8) La fonction h étant l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule jamais; elle est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

Le signe de la dérivée de h est donc l'opposé de celui de $v'(x)$. On en déduit sans mal les variations de h:

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(3)$	$\searrow$	0

Partie II - Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

(9) Par définition, $u_1 = h(u_0) = h(0) = 1/v(0) = 1$. On a également $u_2 = h(u_1) = h(1)$. Or, le tableau de variations de h nous permet d'affirmer que $h(1) \leq h(3) = 1/v(3) \approx 0,86$ et on a bien $u_2 \leq 1$.

(10) On procède par récurrence comme demandé dans l'énoncé:

- <u>intialisation:</u> $u_1 = 1 \in [\ln(2); \ln(3)]$.
- <u>hérédité:</u> supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in [\ln(2); \ln(3)]$. Le tableau de variations de h permet de voir que h est croissante sur cet intervalle. Il suit que
$$\ln(2) \leq 0,8 \approx h(\ln(2)) \leq u_{n+1} = h(u_n) \leq h(\ln(3)) \approx 0,86 \leq \ln(3)$$
et la récurrence est bien terminée.

(11) On procède encore par récurrence (on en a marre mais c'est la fin).

- <u>initialisation:</u> pour $n = 1$, on a bien montré ci-avant que $u_2 \leq 1 = u_1$.
- <u>hérédité:</u> supposons que, pour un certain $n \geq 1$, on ait $u_{n+1} \leq u_n$. Par la question précédente, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ln(2); \ln(3)]$ sur lequel la fonction h est croissante. Il suit que
$$u_{n+2} = h(u_{n+1}) \leq h(u_n) = u_{n+1}$$
et la récurrence est bien terminée.

(12) La suite (u_n) étant décroissante (à partir de $n \geq 1$) et minorée (par $\ln(2)$), le théorème de convergence monotone affirme qu'elle converge vers une limite ℓ qui sera également comprise entre $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Par continuité de la fonction h sur $\mathbb{R}$, le passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = h(u_n)$ impose que ℓ vérifie $\ell = h(\ell)$, équation équivalente à $1/v(\ell) = \ell$ ou encore $\ell \times v(\ell) = 1$.

Exercice 4

On lance (indéfiniment) des boules de neige sur la porte d'un voisin grincheux. À chaque tir, la probabilité de toucher la sonnette vaut $p \in]0; 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note A_n l'évènement "on touche consécutivement deux fois la sonnette pour la première fois avec le $n-$ième lancer". On note $a_n = P(A_n)$.

(1) En revenant à la définition des quantités à calculer, on trouve facilement

$$\begin{array}{rcll} a_1 & = & 0 & \text{(impossible d'avoir deux touches de sonnette après un seul tir)} \\ a_2 & = & p^2 & \\ a_3 & = & (1-p)p^2 & \text{(On rate au premier coup mais on réussit les deux autres)} \end{array}$$

(2) Notons T_i l'évènement "on touche la sonnette au $i-$ème tir". On constate que

$$\{\overline{T}_1, T_1 \cap \overline{T}_2, T_1 \cap T_2\}$$

forme un système complet d'évènement. Par la *formule des probabilités totales*, on a donc

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & P(A_{n+2}) \\ & = & P_{\overline{T}_1}(A_{n+2})P(\overline{T}_1) + P_{T_1\cap\overline{T}_2}(A_{n+2})P(T_1\cap\overline{T}_2) + P_{T_1\cap T_2}(A_{n+2})P(T_1\cap T_2) \end{array}$$

Or, chaque tir manqué "remet les compteurs à zéro", donc

$$\begin{array}{rcl} P_{T_1\cap T_2}(A_{n+2}) & = & 0 \\ P_{T_1\cap\overline{T}_2}(A_{n+2}) & = & P(A_n) = a_n \\ P_{\overline{T}_1}(A_{n+2}) & = & P(A_{n+1}) = a_{n+1} \end{array}$$

et on obtient bien la relation de récurrence

$$(\star) \qquad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n.$$

(3) (a) On voit que $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, et, les (A_n) étant clairement deux à deux incompatibles,

$$S = P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

(b) Il suffit de réindexer la somme

$$\begin{array}{rcll} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} & = & \sum_{n=3}^{+\infty} a_n & \\ & = & \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - a_1 - a_2 & \\ & = & S - a_1 - a_2 & \\ & = & S - a_2 & \text{(car } a_1 = 0\text{).} \end{array}$$

(c) On somme chaque membre de l'égalité $(\star)$ entre 1 et $+\infty$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} & = & \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)a_{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)a_n \\ & \Updownarrow & \\ S - a_2 & = & (1-p)S + p(1-p)S \\ & \Updownarrow & \\ S - p^2 & = & (1-p+p(1-p))S \\ & \Updownarrow & \\ S(1-1+p^2) & = & p^2 \\ & \Updownarrow & \\ S & = & \dfrac{p^2}{p^2} = 1. \end{array}$$

(d) On peut conclure que, presque sûrement, on touchera la sonnette deux fois consécutives.