Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Surveillé

Samedi 20 Janvier
Durée : 2 heures

Une grande importance sera apportée à la présentation, la lisibilité, les efforts de rédaction et la clarté des résultats exposés que l'on demande d'encadrer. Toute copie qui ressemble à un brouillon ne sera pas lue.

Amuses-bouche

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 2)/3$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$ puis que (u_n) est croissante. Quelle est la limite de la suite?

(2) On dispose d'un jeu de 32 cartes classique. On mélange les cartes puis on place le paquet face cachée sur la table. On pioche alors, sans remise, la carte sur le dessus de la pile jusqu'à obtenir une dame. On note alors, pour $n \geq 1$, S_n l'évènement "on obtient une dame pour la première fois à la $n-$ième pioche". En introduisant des évènements bien formulés et en rédigeant scrupuleusement tous les détails, calculer, pour tout $n \geq 1$ la probabilité $p_n = P(S_n)$.
(*On pourra distinguer $n < 30$ et $n \geq 30$. On précise aussi qu'il y a quatre dames dans le paquet.*)

(3) On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer qu'on peut écrire $T = 2I + N$ où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et N est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on explicitera.
(b) Calculer N^2. En déduire, pour tout $k \geq 2$, la valeur de N^k.
(c) Exprimer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T^n en fonction de n, de I et de T.

Exercice 1

Une urne contient trois boules : une boule jaune, une boule verte, une boule rouge.
On effectue dans cette urne des tirages successifs **avec** remise. Pour tout entier $n \geq 1$, on s'intéresse au nombre de couleurs différentes obtenues après n pioches consécutives.
On introduit alors, pour $n \geq 1$, les évènements :

- A_n : "Après n tirages, une seule couleur a été obtenue";
- B_n : "Après n tirages, seulement deux couleurs ont été obtenues";
- C_n : "Après n tirages, les trois couleurs ont été obtenues".

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n. On introduit aussi, pour tout entier $k \geq 1$, les évènements J_k (resp. V_k, R_K) "on pioche une boule jaune (resp. verte, rouge) au $k-$ème tirage".

(1) Déterminer a_1, b_1, c_1 ainsi que a_2, b_2, c_2.

(2) Déterminer, pour tout $n \geq 1$, les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1}), P_{B_n}(B_{n+1}), P_{C_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1}), P_{B_n}(C_{n+1})$ et $P_{C_n}(C_{n+1})$.

(3) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

On rédigera très soigneusement toutes les étapes de cette question.

(4) Montrer alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

(5) Dans cette question, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2.

(b) Monter, par récurrence - en écrivant $A^{n+1} = A^n A$ - que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & w_n & 3^n \end{pmatrix},$$

où (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites dont on précisera les premiers termes u_1, v_1 et w_1 et qui vérifient :

$$u_{n+1} = u_n + 2^{n+1}, \qquad v_{n+1} = v_n + 2w_n, \qquad w_{n+1} = 2w_n + 3^n.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$, montrer que $u_n = 2^{n+1} - 2$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{w_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{w_k}{2^k}\right)$, déterminer l'expression de w_n en fonction de n.

(e) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $v_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$.

(6) Exprimer M en fonction de A. En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'expression des trois probabilités a_n, b_n, c_n en fonction de n.

(7) Quelle est la limite de chacune des trois suites lorsque $n \to +\infty$? Interpréter.

Exercice 2

Partie 1 : Des coefficients binomiaux

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

(1) (a) Calculer S_1, S_2, S_3.

(b) Justifier que: $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}$.

(c) Montrer que: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} + \binom{2n}{n} = 2S_n$.

En déduire que: $S_n = 2^{2n-1} + \dfrac{1}{2}\dbinom{2n}{n}$.

(2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \dbinom{2p}{p} 2^{-2p}$.

(a) Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2} u_p$.

(b) En déduire, par récurrence, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

(c) En déduire alors la limite de u_p lorsque $p \to +\infty$.

Partie 2 : Cours en bourse d'une action

On s'intéresse aux **variations** journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On suppose que, chaque jour, le cours de l'action:

- monte d'une unité $(+1)$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$;
- ou bien descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On observe alors l'évolution de l'action pendant $2n$ jours.
On introduit les évènements A_j: "l'action monte d'une unité le $j-$ième jour" (où $1 \leq j \leq 2n$), V_k : "au bout des $2n$ jours, l'action a subi une évolution de $2k$" (avec $k \in [\![-n, n]\!]$ qui peut donc être négatif) et Z_n : "au bout des $2n$ jours, l'évolution du cours de l'action est positive ou nulle".

Par exemple, si $n = 2$, que le cours a baissé le premier jour mais augmenté les trois autres jours, on a une évolution de $-1 + 1 + 1 + 1 = 2$ et donc V_1 ainsi que Z_2 sont réalisés.

Enfin, on note $p_n = P(Z_n)$ et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est à dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

(3) Écrire l'évènement Z_1 à l'aide des évènements A_i et en déduire l'expression de p_1 en fonction de p et de q.

(4) Soit $k \in [\![-n, n]\!]$. On suppose, dans cette question uniquement, que V_k est réalisé. On note alors x_n (respectivement y_n), le nombre de jours où l'action a augmenté (respectivement baissé).

(a) Écrire, en justifiant, un système de deux équations vérifiées par x_n et y_n. En déduire leurs valeurs.
(b) En fixant les $n + k$ jours où l'action augmente (et donc ceux où elle baisse), quelle est la probabilité que cette évolution précise ait lieu?
(c) En déduire que
$$P(V_k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$$

(5) Justifier alors que $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$.

(6) On revient aux notations de la Partie 1. On suppose, dans cette question que $p = 1/2$.
À l'aide de la Question (5), exprimer p_n à l'aide de S_n puis montrer que
$$p_n = \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}.$$
Que valent $p_1,\ p_2,\ p_3$?
Vérifier qu'on retrouve la même chose qu'à la Question (3).
Que se passe-t-il quand n devient grand ?