Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Surveillé

Solution

Amuses-bouche

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 3$.

- initialisation. Pour $n = 0$, on a bien sûr $u_0 = 3 \geq 3$. Donc c'est vérifié.
- hérédité. Supposons que pour un certain $n \geq 0$, on ait $u_n \geq 3$. Alors, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $u_n^2 \geq 9$ puis
$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{3} \geq \frac{11}{3} > 3.$$
La récurrence est terminée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On voit que
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{3} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{u_n}.$$
Or, pour tout $x \geq 3$, on a (par une étude rapide du signe du trinôme), $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 3$, il suit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc (u_n) est croissante.
Si la suite (u_n) était majorée, comme elle est croissante, elle serait convergente (par théorème de convergence monotone) vers une certaine limite $\ell \geq 3$. Par continuité de la fonction $f :\ x \mapsto (x^2 + 2)/3$ sur $[3; +\infty[$, le passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ donnerait $\ell = f(\ell)$ ou encore
$$\ell = \frac{\ell^2 + 2}{\ell} \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \ell = 1 \text{ ou } \ell = 2.$$
Comme $\ell \geq 3$, ce n'est pas possible et donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

(2) Commençons par observer que, dans le pire des cas, on commence par piocher successivement toutes les cartes (au nombre de 28) qui ne sont pas des dames. Ainsi, la première dame arrive au plus tard avec la 29−ème pioche. Ainsi, $P(S_n) = 0$ si $n \geq 30$.
Soit alors $n < 30$.
On a besoin, pour décrire l'évènement dont on cherche à calculer la probabilité, d'introduire, pour un entier $k \in [\![1, 29]\!]$, les évènements D_k "on tire une dame à la $k-$ème pioche". Si on sait, parmi les cartes qu'on a déjà retournées combien d'entre elles sont des dames ou n'en sont pas, on connait la probabilité de piocher une dame. A chaque nouvelle"mauvaise" pioche, il y a une "mauvaise" carte en moins et une carte en moins dans la pioche.

Alors,

$$\begin{aligned}
p_n &= P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\overline{D}_k\right)\cap D_n\right)\\
&= P(\overline{D}_1)P_{\overline{D}_1}(\overline{D}_2)\dots P_{\overline{D}_1\cap\ldots\cap\overline{D}_{n-2}}(\overline{D}_{n-1})P_{\overline{D}_1\cap\ldots\cap\overline{D}_{n-1}}(D_n) \quad \text{par la \textbf{formule des proba. composées}}\\
&= \frac{28}{32}\times\frac{27}{31}\times\ldots\times\frac{28-(n-2)}{32-(n-2)}\times\frac{4}{32-(n-1)}\\
&= \left(\prod_{k=0}^{n-2}\frac{28-k}{32-k}\right)\times\frac{4}{33-n}\\
&= \frac{(30-n)(31-n)(32-n)(33-n)}{32\times31\times30\times29}\times\frac{4}{33-n} \qquad \text{par télescopage}\\
&= \frac{(30-n)(31-n)(32-n)}{8\times31\times30\times29}
\end{aligned}$$

(3) On considère la matrice $T=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(a) En posant $N=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, on a clairement $T=2I+N$.

(b) Sans difficulté, on voit que $N^2=0$. Il suit que, pour $k\geq 2$, $N^k=N^{k-2}N^2=0$.

(c) Comme $2I$ et N commutent (car $2I$ commute avec toute matrice), on peut appliquer la formule du binôme. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k(2I)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k\\
&= \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k \qquad \text{car } N^k=0 \text{ pour tout } k\geq 2\\
&= 2^nI+n2^{n-1}N = 2^nI+n2^{n-1}(T-2I)\\
&= 2^n(1-n)I+n2^{n-1}T.
\end{aligned}$$

Exercice 1

Une urne contient trois boules : une boule jaune, une boule verte, une boule rouge.
On effectue dans cette urne des tirages successifs **avec** remise. Pour tout entier $n\geq 1$, on s'intéresse au nombre de couleurs différentes obtenues après n pioches consécutives.
On introduit alors, pour $n\geq 1$, les évènements :

- A_n : "Après n tirages, une seule couleur a été obtenue";
- B_n : "Après n tirages, seulement deux couleurs ont été obtenues";
- C_n : "Après n tirages, les trois couleurs ont été obtenues".

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n. On introduit aussi, pour tout entier $k\geq 1$, les évènements J_k (resp. V_k, R_K) "on pioche une boule jaune (resp. verte, rouge) au $k-$ème tirage".

(1) Après un seul tirage dans l'urne, il est certain de n'avoir qu'une seule couleur et impossible d'en avoir deux ou trois. Donc $a_1=1$, $b_1=c_1=0$.
Après deux tirages, on peut avoir obtenu une ou deux couleurs mais il est impossible d'avoir les trois

couleurs, donc $c_2 = 0$. De plus,

$$\begin{aligned} a_2 &= P([V_1 \cap V_2] \cup [J_1 \cap J_2] \cup [R_1 \cap R_2]) \\ &= P([V_1 \cap V_2]) + P([J_1 \cap J_2]) + P([R_1 \cap R_2]) && \text{par incompatibilité} \\ &= P(V_1)P(V_2) + P(J_1)P(J_2) + P(R_1)P(R_2) && \text{par indépendance des tirages} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc $b_2 = 1 - a_2 = \dfrac{2}{3}$.

(2) Si après n tirages :

- A_n est réalisé, alors on a obtenu une seule couleurs, on peut avoir une ou deux couleurs après le $(n+1)-$ème tirage. Pour n'en conserver qu'une, il faut piocher la même couleur que celle déjà eue (ce qui se fait avec probabilité $1/3$). Pour passer à deux couleurs, il suffit de piocher une des deux autres boules (ce qui se fait avec probabilité $2/3$). Ainsi,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}, \qquad P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}, \qquad P_{A_n}(C_{n+1}) = 0.$$

- B_n est réalisé, alors on a obtenu deux couleurs. On peut, avec un tirage de plus, rester à deux couleurs si on pioche à nouveau une des deux couleurs obtenues (avec probabilité $2/3$) ou passer à trois couleurs si on pioche la boule que l'on a pas encore piochée (avec probabilité $1/3$). On ne peut naturellement pas avoir une seule couleur après $n+1$ tirages. Ainsi,

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = 0, \qquad P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}, \qquad P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

- Enfin, si C_n est réalisé, on a déjà les trois couleurs. On est assuré d'avoir encore les trois couleurs après un tirage de plus, peu importe ce qu'on pioche. Ainsi,

$$P_{C_n}(C_{n+1}) = 0, \qquad P_{C_n}(B_{n+1}) = 0, \qquad P_{C_n}(C_{n+1}) = 1.$$

(3) Pour $n \geq 3$, il parait assez clair que $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'évènements (on est forcément dans un des trois cas qui sont tous les trois de probabilités non nulles et qui sont deux à deux incompatibles). Par la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1}P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}P(C_n) \\ &= \frac{1}{3}a_n \end{aligned}$$

De façon analogue, on obtient, toujours pour $n \geq 3$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P_{A_n}(B_{n+1}P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1}P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1}P(C_n) \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \\ \\ c_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n + c_n \end{aligned}$$

ce qui se traduit matriciellement par

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On observera que cette relation matricielle n'est *a priori* vraie que pour $n \geq 3$. Il faudrait, pour répondre complètement à la question, vérifier que c'est vrai aussi pour $n = 1$ et $n = 2$. On peut le faire pour $n = 1$ car on a calculé ci-avant les probabilités $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

et la formule est donc vraie pour $n = 1$. On laisse le soin au lecteur ou à la lectrice de calculer a_3, b_3, c_3 (avec la FPT et le s.c.e $\{A_2, B_2\}$ et de vérifier que la formule est vraie aussi.

On a donc $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) Cette récurrence est trèèèès facile et il est impératif de savoir la faire.

- initialisation. Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire, c'est évident car $M^0 = I$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$
Alors,
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= M M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= M^n \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
ce qui est bien la formule au rang n et termine la récurrence.

(5) Dans cette question, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Un simple calcul matriciel donne
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) C'est parti.

- initialisation. Comme $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, il suffit de poser $u_1 = 2$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 1$ pour que la propriété soit vérifiée.

- hérédité. Supposons que la formule soit vraie pour un certain $n \geq 1$. Alors,
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & w_n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n + 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ v_n + 2w_n & 2w_n + 3^n & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ v_{n+1} & w_{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
et on a bien la formule au rang $n + 1$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Observons pour commencer que $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1}$. Il suit, par télescopage que

$$\begin{aligned} u_n - u_1 &= \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} = 2^2 \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 4 \sum_{j=0}^{n-2} 2^j \\ &= 4 \times \frac{1 - 2^{n-1}}{1-2} \\ &= 2^{n+1} - 4, \end{aligned}$$

et donc $u_n = u_1 + 2^{n+1} - 4 = 2^{n+1} - 2$, ce qui est bien la formule attendue.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Cette fois, on voit que

$$\frac{w_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{w_n}{2^n} = \frac{2w_n + 3^n}{2^{n+1}} - \frac{w_n}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Il suit, toujours par télescopage que

$$\begin{aligned} \frac{w_n}{2^n} - \frac{w_1}{2} &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{w_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{w_k}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

et il suit que

$$w_n = 2^n\left(\frac{w_1}{2} - \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = 2^n\left(-1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = 3^n - 2^n$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $v_{n+1} - v_n = 2w_n$, on calcule encore une somme télescopique pour trouver v_n. Comme $v_1 = 0$,

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = 2\sum_{k=1}^{n-1} w_k \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(3^k - 2^k\right) = 2\left(3 \times \frac{1 - 3^{n-1}}{1-3} - 2 \times \frac{1 - 2^{n-1}}{1-2}\right) \\ &= 2\left(\frac{3^n - 3}{2} + 2 - 2^n\right) \\ &= 3^n - 2^{n+1} + 1, \end{aligned}$$

ce qui est la formule attendue et fait bien plaisir.

On peut donc écrire, pour tout $n \geq 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}.$$

(6) On remarque que $M = \frac{1}{3}A$. Il suit que, pour tout $n \geq 1$,

$$M^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} A^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 2 & 2^{n-1} & 0 \\ 3^{n-1} - 2^n + 1 & 3^{n-1} - 2^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

En appliquant à la matrice colonne dont les composantes sont $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$, on obtient

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 2 & 2^{n-1} & 0 \\ 3^{n-1} - 2^n + 1 & 3^{n-1} - 2^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/3)^{n-1} \\ 2((2/3)^{n-1} - (1/3)^{n-1}) \\ 1 - 2(2/3)^{n-1} + (1/3)^{n-1} \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \\ b_n &= 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\ c_n &= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

(7) On voit que a_n et b_n tendent toutes deux vers 0 lorsque $n \to +\infty$ alors que $c_n \to 1$. Ce n'est pas très surprenant, après un grand nombre de tirages la probabilité d'avoir les trois couleurs se rapproche de 1.

Exercice 2

Partie 1 : Des coefficients binomiaux

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

(1) (a) D'après la définition de S_n, on a

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{1} \binom{2}{1+i} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=0}^{2} \binom{4}{2+i} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \\ &= 6 + 4 + 1 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=0}^{3} \binom{6}{3+i} = \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \\ &= 20 + 15 + 6 + 1 = 42. \end{aligned}$$

(b) D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} 1^i 1^{2n-i} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

(c) Par définition,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} && \text{(d'une part)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} && \text{(par symétrie)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} \end{aligned}$$

On a donc

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} + \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} + \binom{2n}{n}.$$

Ceci permet, avec la question précédente,

$$2S_n = 2^{2n} + \binom{2n}{n},$$

ce qui donne bien, en divisant par 2,

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

(2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{u_{p+1}}{u_p} &= \frac{\binom{2(p+1)}{p+1} 2^{-2(p+1)}}{\binom{2p}{p} 2^{-2p}} \\
&= \frac{[2(p+1)]!p!p!}{2^2(p+1)!(p+1)!(2p)!} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)2(p+1)} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) On raisonne, comme demandé, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

- <u>initialisation</u>. Pour $p = 1$, on a
$$0 \leq u_1 = \binom{2}{1} 2^{-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$
car $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$
Alors, d'après la question précédente
$$\begin{aligned}
u_{p+1} &= \frac{2p+1}{2p+2} u_p \leq \frac{2p+1}{2p+2} \frac{1}{\sqrt{2p+1}} = \sqrt{\frac{(2p+1)(2p+1)}{(2p+2)(2p+2)(2p+1)}} \\
&\leq \sqrt{\frac{2p+1}{(2p+2)^2}}.
\end{aligned}$$
Or,
$$\begin{aligned}
\frac{2p+1}{(2p+2)^2} \leq \frac{1}{2p+3} &\iff (2p+1)(2p+3) \leq (2p+2)^2 \\
&\iff 4p^2 + 8p + 3 \leq 4p^2 + 8p + 4 \\
&\iff 3 \leq 4,
\end{aligned}$$
ce qui est vrai. On a donc la majoration voulue et la récurrence est terminée.

(c) Par théorème des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\lim_{p \to +\infty} u_p = 0.$$

Partie 2 : Cours en bourse d'une action

On s'intéresse aux **variations** journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On suppose que, chaque jour, le cours de l'action:

- monte d'une unité ($+1$) avec une probabilité p ($0 < p < 1$);
- ou bien descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On observe alors l'évolution de l'action pendant $2n$ jours.
On introduit les évènements A_j: "l'action monte d'une unité le $j-$ième jour" (où $1 \leq j \leq 2n$), V_k : "au bout des $2n$ jours, l'action a subi une évolution de $2k$" (avec $k \in [\![-n, n]\!]$ qui peut donc être négatif) et Z_n : "au bout des $2n$ jours, l'évolution du cours de l'action est positive ou nulle".

Par exemple, si $n = 2$, que le cours a baissé le premier jour mais augmenté les trois autres jours, on a une évolution de $-1 + 1 + 1 + 1 = 2$ et donc V_1 ainsi que Z_2 sont réalisés.

Enfin, on note $p_n = P(Z_n)$ et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est à dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

(3) Z_1 est réalisé si et seulement si, après 2 jours, l'évolution est positive (ou nulle) ce qui peut se passer si, successivement, l'action baisse puis monte, ou monte puis baisse ou encore monte deux fois. Ceci s'écrit
$$Z_1 = [A_1 \cap \overline{A}_2] \cup [\overline{A}_1 \cap A_2] \cup [A_1 \cap A_2].$$
Ces trois alternatives étant deux à deux incompatibles, on peut calculer leur probabilité comme une somme. De plus, les évolutions deux jours successifs étant supposées indépendantes, on a
$$\begin{aligned} p_1 &= P(Z_1) = P\left([A_1 \cap \overline{A}_2] \cup [\overline{A}_1 \cap A_2] \cup [A_1 \cap A_2]\right) \\ &= P(A_1 \cap \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_2) \\ &= pq + qp + p^2 = 2pq + p^2 \\ &= p(p + 2q) = p(2 - p) \end{aligned}$$

(4) Soit $k \in [\![-n, n]\!]$. On suppose, dans cette question uniquement, que V_k est réalisé. On note alors x_n (respectivement y_n), le nombre de jours où l'action a augmenté (respectivement baissé).

(a) L'observation a lieu durant $2n$ jours et se découpent en deux catégories : les jours où l'action a augmenté et ceux où elle a baissé, leur total étant égal au nombre de jours, on a
$$x_n + y_n = 2n.$$
Par ailleurs, sachant que V_k est réalisé, au bout des $2n$ jours l'évolution est de $2k$. Il est clair que l'évolution correspond au nombre de fois où on augmente d'une unité auquel on soustrait le nombre de fois où l'action baisse d'une unité, c'est à dire
$$x_n - y_n = 2k.$$
Les deux équations ci-dessus donnent un système 2×2 que l'on résout immédiatement
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_n + y_n &=& 2n \\ x_n - y_n &=& 2k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_n &=& n + k \\ y_n &=& n - k \end{array}\right.$$

(b) Si on connait les $n + k$ jours où on veut l'action augmente, on connait de fait nécessairement le comportement de l'action les $n - k$ autres jours : elle baisse. Les évolutions sont indépendantes et chaque jour, l'action augment avec probabilité p et baisse avec probabilité q. La probabilité que cette évolution précise ait lieu est donc égale à
$$\underbrace{p \times p \times ... \times p}_{n+k \text{ fois}} \times \underbrace{q \times q \times ... \times q}_{n-k \text{ fois}} = p^{n+k} q^{n-k}.$$

(c) V_k est réalisé si et seulement si l'évolution de l'action au bout de $2n$ jours est de $2k$ ce qui correspond à une hausse pendant $n+k$ jours et baisse pendant $n-k$ jours. On connait la probabilité de chacune de ces évolutions, il faut donc multiplier par le nombre d'évolutions de $2n$ jours avec $n + k$ jours de hausse. Il y a $\binom{2n}{n+k}$ façons de placer les $n+k$ jours de hausse au sein des $2n$ jours d'observation. Les autres jours étant nécessairement des jours de baisse. Au final, on a bien

$$P(V_k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$$

(5) Pour que l'évolution soit positive (ou nulle) après $2n$ jours, il faut qu'elle ait une valeur de $2k$ avec $k \geq 0$, c'est à dire que

$$Z_n = \bigcup_{k=0}^{n} V_k$$

Cette réunion étant disjointe, on peut écrire

$$p_n = P(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} P(V_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k},$$

ce qui est bien la formule attendue.

(6) On revient aux notations de la **Partie 1.** On suppose, dans cette question que $p = 1/2$.

$$\begin{aligned}
p_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} = 2^{-2n} S_n \\
&= 2^{-2n} \left(2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.
On utilise les calculs ci-avant.

$$\begin{aligned}
p_1 &= 2^{-2} S_1 = \frac{3}{4}, \\
p_2 &= 2^{-4} S_2 = \frac{11}{16} \\
p_3 &= 2^{-6} S_3 = \frac{42}{64} = \frac{21}{32}.
\end{aligned}$$

On avait trouvé précédemment la valeur de p_1 en fonction de p et q. On vérifie que dans ce cas particulier où $p = q = 1/2$, cela coïncide :

$$p_1 = p(p + 2q) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4},$$

ce qui est bien ce qu'on vient d'obtenir. Ouf, sauvés.

On observe aussi que

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + u_n\right).$$

En particulier,

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2},$$