Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Surveillé

Mercredi 20 Mars
Durée : 2 heures

Une grande importance sera apportée à la présentation, la lisibilité, les efforts de rédaction et la clarté des résultats exposés que l'on demande d'encadrer. Toute copie qui ressemble à un brouillon ne sera pas lue.

Amuses-bouche

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) Montrer que la fonction f ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}_+$. Est-elle dérivable en 0?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On commencera par rappeler les formules des développements limités à l'ordre 2*, lorsque* $u \to 0$*, de* $\ln(1+u)$ *et* e^u*.*

(2) Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0;1[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n-$ième de f.

(3) Résoudre les équations $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ où, A est la matrice ci-dessous. On présentera les solutions sous forme de *sous- espace vectoriel (de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*) engendré* par une famille (finie) de vecteurs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(4) Soit (u_1, u_2, u_3) une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $(2u_1, u_1 - u_2, u_1 - u_2 + 2u_3)$ est encore une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

(1) Dresser le tableau de variations de f en précisant (et justifiant) ses limites en 0 et en $+\infty$.

(2) Étudier la convexité de f.

(3) Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

(4) Montrer : $b \in [2; 4]$.
On rappelle que $\ln(2) \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

On introduit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

(5) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.

(6) Déterminer la monotonie de la suite (u_n). En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

(7) (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.
(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

(8) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0}(u_n - b)$?

(9) Bonus `MIASHS` : Python.
Cette question est réservée aux étudiant.e.s qui suivent la formation susmentionnée.
On rappelle que la commande `log(x)` *du package* `numpy` *renvoie la valeur de* $\ln(x)$.

(a) Écrire une fonction d'en-tête `def suite_u(n):` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.
(b) Recopier et compléter la fonction suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
def valeur_approchee(epsilon) :
    n=0
    while ......... :
        n=n+1
    return .........
```

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x, on pose :

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x/n \\ x/n & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^x + e^{-x} & e^x - e^{-x} \\ e^x - e^{-x} & e^x + e^{-x} \end{pmatrix}$$

(1) Calculer P^2 puis en déduire que P est inversible et donner son inverse.

(2) Soit x un réel fixé.

(a) (i) Montrer, à l'aide du déterminant, qu'il n'existe que deux réels λ tel que $R(x) - \lambda I$ n'est pas inversible. On précisera la valeur de ces deux réels en fonction de x.

(ii) Déterminer une matrice diagonale $D(x)$ telle que

$$R(x) = PD(x)P^{-1}.$$

Que constate-t-on concernant les coefficients diagonaux de $D(x)$?

(b) En déduire que, pour tout couple (x, y) de réels : $R(x)R(y) = R(x + y)$.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $(R(x))^n = R(nx)$.

(d) Calculer $R(0)$ puis déduire également de la Question (2b) que $R(x)$ est inversible et préciser la matrice inverse de $R(x)$.

On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M. On note alors : $\lim_{n\to\infty} M_n = M$.
On admet alors le résultat suivant noté $(\star)$.

Résultat admis

Si $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$ et Q est une matrice inversible, alors : $\lim\limits_{n\to\infty} QM_nQ^{-1} = QMQ^{-1}$. $(\star)$.

L'objectif de la suite de l'exercice est de déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $((A_n(x))^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(3) Soit n un entier naturel non nul fixé et x un réel non nul fixé.

(a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D_n(x)$ vérifiant : $A_n(x) = PD_n(x)P^{-1}$.

(4) Soit x un réel non nul fixé.

(a) Soit n un entier naturel non nul fixé. Montrer que pour tout entier k : $A_n(x)^k = PD_n(x)^kP^{-1}$.

(b) Rappeler le développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1 + u)$ lorsque $u \to 0$ puis calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$

(c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n(x)^n = D(x)$, où la matrice $D(x)$ est celle obtenue à la Question (2(a)ii)

(d) En déduire, à l'aide du résultat $(\star)$ la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n(x)^n$.