Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Surveillé

Solution

Amuses-bouche

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) Montrer que la fonction f ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}_+$. Est-elle dérivable en 0?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On commence, comme demandé, par rappeler les formules de DL en 0 à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad u \to 0 \\ e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad u \to 0. \end{aligned}$$

On va pouvoir les appliquer pour montrer le caractère continu de f en 0. En effet, au voisinage de 0, on a

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

donc, pour $x \neq 0$, dans un voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)} = \frac{1-1-x^2+o(x^2)}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\ &= \frac{-x^2+o(x^2)}{x+o(x)} = \frac{-x+o(x)}{1+o(1)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0) \end{aligned}$$

donc f est continue en 0.
Sur $]0,+\infty[$, f est quotient d'une combinaison de composées fonctions usuelles continues (exponentielle, polynomiale et log) dont le dénominateur ne s'annule pas, donc elle même continue.
Au final, f est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour la dérivabilité en 0, on regarde la limite du taux d'accroissement. Soit $x \neq 0$ dans un voisinage de 0.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{1-e^{x^2}}{x\ln(1+x)} = \frac{-x^2+o(x^2)}{x(x+o(x))}\\ &= \frac{-1+o(1)}{1+o(1)}\\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1.\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=-1$.

(2) On a fait cet exercice en classe. Il s'agit de dériver des fonctions racines... On procède par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n=0$,
$$f^{(0)}(x)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}},$$
et la formule est vraie pour $n=0$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n\in\mathbb{N}$, on ait
$$f^{(n)}(x)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$
Alors,
$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left((1-x)^{-n-\frac{1}{2}}\right)'\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-\left(-n-\frac{1}{2}\right)\right)\left((1-x)^{-n-\frac{1}{2}-1}\right)\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right)\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{2\times 2(n+1)}\right)\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right)\\ &= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right),\end{aligned}$$
ce qu'on voulait pour terminer cette récurrence.

(3) On considère la matrice
$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\-2&-2&5\end{pmatrix}.$$
Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}AX=X &\iff \left\{\begin{array}{rcl}x-2y+2z&=&x\\-2x+y+2z&=&y\\-2x-2y+5z&=&z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}-2y+2z&=&0\\-2x+2z&=&0\\-2x-2y+4z&=&0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&z\\y&=&z\end{array}\right.\\ &\iff X=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc
$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = X\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$
De même,
$$\begin{aligned} AX = 3X \quad & \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-2y+2z &=& 3x \\ -2x+y+2z &=& 3y \\ -2x-2y+5z &=& 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x-2y+2z &=& 0 \\ -2x-2y+2z &=& 0 \\ -2x-2y+2z &=& 0 \end{array}\right. \\ & \iff x = y - z \\ & \iff X = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$
Donc
$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = 3X\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

(4) Soit (u_1, u_2, u_3) une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$. Comme la famille est supposée génératrice de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire
$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3).$$
Les règles de calculs sur la manipulation du symbole $\text{Vect}(\cdot)$ permettent de remplacer un vecteur par un multiple non nul de celui-ci, et/ou de remplacer un vecteur par une combinaison linéaire des vecteurs de la famille pour laquelle la contribution du vecteur que l'on remplace est non nulle. Ainsi,
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &= \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \\ &= \text{Vect}(u_1, u_1 - u_2, 2u_3) \\ &= \text{Vect}(u_1, u_1 - u_2, u_1 - u_2 + 2u_3) \\ &= \text{Vect}(2u_1, u_1 - u_2, u_1 - u_2 + 2u_3) \end{aligned}$$
Ainsi, la famille $(2u_1, u_1 - u_2, u_1 - u_2 + 2u_3)$ est encore génératrice de $\mathbb{R}^3$. Comme elle est constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, elle en forme une base. En particulier, elle est libre.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

(1) La fonction $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$
Par ailleurs,
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = +\infty$$
et, par croissances comparées,
$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$
donc
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$	

(2) On a déjà dit que f était de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc on peut utiliser la caractérisation de la convexité sur le signe de la dérivée seconde. Or, pour tout $x > 0$,
$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0.$$
Donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

(3) Sur $]0, 1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Il suit du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]0, 1[$ vers $]1, +\infty[$. Puisque $2 \in]1, +\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0, 1[$ tel que $f(a) = 2$.
De même, sur $]1, +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et limites aux bornes sont 1 et $+\infty$. Il suit à nouveau du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]1, +\infty[$ vers $]1, +\infty[$. Puisque $2 \in]1, +\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1, +\infty[$ tel que $f(b) = 2$.
Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc, l'équation $f(x) = 2$ n'admet que deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$: $a \in]0, 1[$ et $b \in]1, +\infty[$.

(4) On a
$$f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2,$$
$$f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2.$$
Ainsi
$$f(2) < f(b) < f(4).$$
Or, f étant strictement croissante et bijective sur $]1, +\infty[$, sa bijection réciproque l'est aussi. En l'appliquant à l'encadrement précédent on obtient bien $2 < b < 4$ ce qui donne bien $b \in [2; 4]$.

On introduit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

(5) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in [b, +\infty[$.

<u>initialisation :</u> Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geq b$ d'après ce qui précède.

<u>hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geq b$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme, $\ln(u_n) \geq \ln(b) = b - 2$, la dernière égalité provenant du fait que $2 = f(b) = b - \ln(b)$. Ainsi, $u_{n+1} \geq b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \in [b, +\infty[$.

En conclusion,
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq b.$$

(6) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - (u_n - \ln(u_n)) \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$
Mais $u_n \geq b$ d'après la question précédente et f est croissante sur $[b, +\infty[\subset [1, +\infty[$ d'après la Question (1). Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc
$$u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0.$$
Ainsi, (u_n) est décroissante.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par b, elle converge vers une limite $\ell \geq b$ d'après le théorème de convergence monotone.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

ou encore

$$f(\ell) = 2.$$

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$, on a $\ell = b$.
En conclusion, (u_n) converge et admet pour limite b.

(7) (a) Considérons la fonction g définie sur $[b, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \geq b$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors, puisque $b \geq 2$, on a :

$$\forall x \geq b, \quad |g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$

En outre, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.
La suite (u_n) convergeant vers b en décroissant, il suit de l'inégalité des accroissements finis (IAF) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &= |u_{n+1} - b| \\ &= |g(u_n) - g(b)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - b| \\ &= \frac{1}{2}(u_n - b). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b).$$

(b) La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b, on a déjà

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
<u>initialisation :</u> Pour $n = 0$, puisque $b \in [2; 4]$ d'après **3**, il vient

$$u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$

<u>hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors, il suit de la question précédente que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) && \text{Question précédente, IAF} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} && \text{par HR} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(8) Comme, pour tout $n \geq 0$, $u_n - b \geq 0$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}(u_k - b)\right)_n$ est croissante. Mais on a, d'après la question précédente

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - b) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \times \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leq 4.$$

Ainsi la suite des sommes partielles est croissante et majorée et converge par théorème de convergence monotone, ce qui veut dire que la série $\sum_{n\geq 0}(u_n - b)$ est convergente.

(9) Bonus `MIASHS` : Python.
Cette question est réservée aux étudiant.e.s qui suivent la formation susmentionnée.
On rappelle que la commande `log(x)` *du package* `numpy` *renvoie la valeur de* $\ln(x)$.

(a) C'est une utilisation classique d'une boucle `for`.

```
def suite_u(n)
    u=0
    for k in range(n):
        u= np.log(u)+2
    return u
```

(b) u_n fournit une valeur approchée de b à `epsilon` près dès que n est tel que $u_n - b \leq \varepsilon$, et on utilise alors la majoration de $u_n - b$ fournie par la récurrence qui suit l'IAF, car on ne peut naturellement pas avoir une condition qui porte sur b qu'on ne connait pas ! positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
def valeur_approchee(epsilon) :
    n=0
    while (1/2)**(n-1) > epsilon :
        n=n+1
    return n
```

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x, on pose :

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x/n \\ x/n & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

(1) On obtient $P^2 = 2I$ donc $P\left(\frac{1}{2}P\right) = I$ ce qui montre que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}P$.

(2) Soit x un réel fixé.

(a) (i) On sait qu'une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Observant que,

$$e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x} = 2e^x \quad \text{et} \quad (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4e^x e^{-x} = 4,$$

il suit que

$$\begin{aligned} R(x) - \lambda I \text{ non inversible} \quad &\iff \quad \det(R(x) - \lambda I) = 0 \\ &\iff \quad \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \lambda\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \lambda\right) - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \\ &\iff \quad \lambda^2 - (e^x + e^{-x})\lambda + 1 = 0 \\ &\iff \quad \lambda = e^x \text{ ou } \lambda = e^{-x}, \end{aligned}$$

car le discriminant du polynôme du second degré ci-avant vaut

$$\Delta = (e^x + e^{-x})^2 - 4e^{-x} = (e^x - e^{-x})^2.$$

Les deux valeurs de λ cherchées sont donc e^x et e^{-x}.

(ii) P étant inversible, cette équation est équivalente à

$$P^{-1}R(x)P = D(x).$$

Connaissant P^{-1} grâce à la première question, le calcul donne alors

$$D(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^x + e^{-x} & e^x - e^{-x} \\ e^x - e^{-x} & e^x + e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

La matrice $D(x)$ est bien diagonale; ses coefficients diagonaux sont les valeurs de λ trouvées à la question précédente. Coïncidence ? Je ne crois pas!

(b) On a vu que : $R(x) = PD(x)P^{-1}$. On a de même : $R(y) = PD(y)P^{-1}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} R(x)R(y) &= PD(x)P^{-1}PD(y)P^{-1} \\ &= PD(x)D(y)P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} e^x e^y & 0 \\ 0 & e^{-x}e^{-y} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} e^{x+y} & 0 \\ 0 & e^{-x-y} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= PD(x+y)P^{-1} \\ &= R(x+y). \end{aligned}$$

(c) Par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a : $(R(x))^0 = I$ et $R(0x) = R(0) = I$.
- <u>hérédité.</u> Supposons, que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $R(x)^n = R(nx)$. On a alors :

$$\begin{aligned} R(x)^{n+1} &= R(x)^n R(x) \\ &= R(nx)R(x) \quad \text{par HR} \\ &= R(nx + x) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= R((n+1)x) \end{aligned}$$

(d) Ainsi, pour tout entier naturel n, $R(x)^n = R(nx)$.

(e) On a déjà vu que $R(0) = I$. En choisissant $y = -x$ dans la question 2b, on obtient : $R(x)R(-x) = R(x - x) = R(0) = I$ donc $R(x)^{-1} = R(-x)$.

On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M. On note alors : $\lim_{n\to\infty} M_n = M$.
On admet alors le résultat suivant noté $(\star)$.

Résultat admis

Si $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$ et Q est une matrice inversible, alors : $\lim\limits_{n\to\infty} QM_nQ^{-1} = QMQ^{-1}$. $(\star)$.

L'objectif de la suite de l'exercice est de déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $((A_n(x))^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(3) Soit n un entier naturel non nul fixé et x un réel non nul fixé.

(a) Encore une fois, cette équation est équivalente à

$$D_n(x) = P^{-1}A_n(x)P.$$

Le calcul donne alors
$$D_n(x) = \begin{pmatrix} 1+\frac{x}{n} & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{n} \end{pmatrix}$$
qui est bien diagonale.
Remarque. On pourrait voir que les coefficients diagonaux de $D_n(x)$ sont exactement les réels λ tels que $A_n(x) - \lambda I$ n'est pas inversible; on laisse le plaisir de la vérification à la lectrice ou lecteur, ce n'était dans tous les cas pas demandé ici.

(4) Soit x un réel non nul fixé.

(a) Par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $k = 0$, on a : $A_n(x)^0 = I$ et $PD_n(x)^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$.
- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on ait $A_n(x)^k = PD_n(x)^kP^{-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} A_n(x)^{k+1} &= A_n(x)^k A_n(x) \\ &= PD_n(x)^k \underbrace{P^{-1}P}_{=I} D_n(x)^k P^{-1} \qquad \text{par HR et d'après la formule de la Question 3a} \\ &= PD_n(x)^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier k : $A_n(x)^k = PD_n(x)^kP^{-1}$.

(b) D'après le cours
$$\ln(1+u) = u + o(u), \quad u \to 0.$$
En utilisant ce DL avec $u = \pm\dfrac{x}{n} \to 0$, $n \to +\infty$, on a
$$\begin{aligned} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \exp(n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \to +\infty \\ &= \exp(x + o(1)), \quad n \to +\infty \end{aligned}$$
Or, $x + o(1) \to x$, lorsque $n \to +\infty$. Par continuité de l'exponentielle, on a donc
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x,$$
et de même
$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x}.$$

(c) Comme $D_n(x)$ est une matrice diagonale, on a d'après la définition de la limite d'une matrice :
$$D_n(x)^n = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \end{pmatrix}$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} D_n(x)^n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n & 0 \\ 0 & \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = D(x).$$

(d) Utilisons le résultat $(\star)$ avec la matrice $D_n(x)^n$ et P, ce qui donne :
$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} A_n(x)^n &= \lim_{n\to\infty} PD_n(x)^nP^{-1} \qquad \text{d'après la question 4a} \\ &= PD(x)P^{-1} \qquad \text{d'après la question précédente} \\ &= R(x) \end{aligned}$$