**Math 1NSD2.** 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

## Interrogation n°1

*Mercredi 27 Septembre*
*Solution*

# Exercice 1

*Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

(1) (i) On applique les règles de calcul rappelées dans le premier chapitre. On constate notamment que, comme $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, alors

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor x \rfloor + \frac{4}{5} < \lfloor x \rfloor + 1$$

et par conséquent

$$\left\lfloor \lfloor x \rfloor + \frac{4}{5} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{9 \times (-3)^{2n}}{3^{n+3}} + (-1)^{n+1} \times (-3)^{n-1} &= \frac{3^2 \times (-1)^{2n} \times 3^{2n}}{3^{n+3}} + (-1)^{n+1+n-1} \times 3^{n-1} \\ &= 3^{2n+2} \times 3^{-n-3} + 3^{n-1} \qquad \text{car } (-1)^{2n} = 1 \\ &= 2 \times 3^{n-1}. \end{aligned}$$

(2) (i) Pour que la fonction $f$ soit définie, il faut (et il suffit) que l'argument de la racine soit positif ou nul et que le dénominateur de s'annule pas, ce qui se résume par

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\iff |x| - 2 > 0 \\ &\iff x \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[ \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{D}_f = ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[.$$

(ii) Pour la fonction $g$, il faut déterminer le signe de la quantité en argument du logarithme et s'assurer qu'elle est strictement positive. On commence par factoriser (via calcul du discriminant) le polynôme du second degré

$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$$

Ainsi,

$$(x-1)(2x^2 - x - 1)x^2 > 0 \iff x^2(x-1)^2(2x+1) > 0 \iff x \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

ou encore

$$\mathcal{D}_g = \left]-\frac{1}{2}; 0\right[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[.$$

(3) Pour montrer l'inégalité demandée, on étudie la fonction différence. En posant $\varphi(x) = \ln(1-x) + x + x^2$, il faut donc montrer que pour tout $x \in [0; 1/2]$, on a $\varphi(x) \geq 0$. La fonction est dérivable sur l'intervalle en question (comme combinaison de fonctions usuelles dérivables) et on a

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{-2x^2 + x}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0, \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

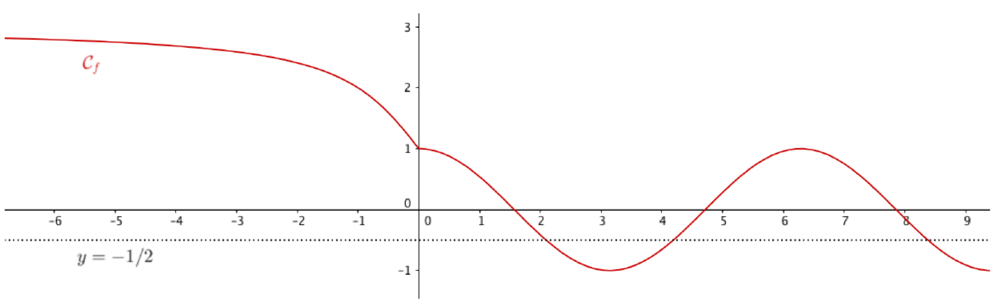
Ainsi $\varphi$ est bien croissante sur l'intervalle précédent, mais $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, et on a bien l'inégalité demandée.

# Exercice 2

D'après l'énoncé, il faut qu'en 0, $f$ prenne la valeur 1 (donc la courbe passe par le point $(0; 1)$. La deuxième condition signifie que $f(x)$ ne s'écarte de la valeur $f(0) = 1$ qu'au plus de 2, c'est à dire que, pour tout $x$ réel, $f(x)$ est compris entre $-1$ et 3:

$$|f(x) - 1| \leq 2 \iff -2 \leq f(x) - 1 \leq 2 \iff -1 \leq f(x) \leq 3.$$

Enfin, la troisième condition impose qu'il existe un réel strictement positif pour lequel $f$ prend une valeur strictement inférieure à $-1/2$. On propose donc une courbe comme ci-dessous:




# Exercice 3

On résout les systèmes par la méthode du Pivot de Gauss.

(i)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1\\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 4\\ x & - & y & + & 2z & - & t & = & -2\\ 3x & + & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1\\ & & y & + & 3z & + & t & = & -2\\ & - & 2y & + & z & - & 2t & = & -3\\ & - & 2y & - & 2z & - & 3t & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & - & 2z & & & = & 3\\ & & y & + & 3z & + & t & = & -2\\ & & & & z & & & = & -1\\ & & & & 4z & - & t & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrcr} x & & & & & = & 1\\ & y & & + & t & = & 1\\ & & z & & & = & -1\\ & & & & t & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & & & & = & 1\\ & y & & & = & -2\\ & & z & & = & -1\\ & & & t & = & 3 \end{array}\right.$$

donc (le système est de Cramer et) l'ensemble des solutions est réduit à

$$\mathcal{S} = \{(1, -2, -1, 3)\}.$$

(ii)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 2\\ 4x & + & 4y & + & z & = & 3\\ 6x & + & 7y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 2\\ & - & 2y & - & z & = & -1\\ & - & 2y & - & z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 2\\ & - & 2y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}(1-y)\\ z & = & 1-2y \end{array}\right.$$

Ainsi, il y a une infinité de solutions (on a choisi de laisser la variable $y$ libre):

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{2}(1-y), y, 1-2y\right) \,:\; y \in \mathbb{R}\right\}.$$