Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Interrogation n°2

Mercredi 11 Octobre
Durée : 33 minutes

Exercice 1

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k(2k^2 - 1), \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right), \qquad C_n = \sum_{i=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2.$$

(2) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 2

On considère la suite (w_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$w_0 = 1, \qquad w_1 = 0, \quad \text{et} \quad w_{n+2} = 3w_{n+1} + 4w_n.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{5}\left(4^n + 4(-1)^n\right)$.
(2) On appelle équation caractéristique associée à la suite, l'équation $q^2 = 3q + 4$. Résoudre cette équation. Commenter.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{2u_n + 1}{1 + u_n} \end{cases}.$$

(1) Déterminer les quatre premiers termes de la suite.
(2) Dresser le tableau de variations, sur l'intervalle $[1, 2]$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.
(3) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
(4) Montrer, par récurrence, que (u_n) est croissante.