Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Interrogation n°2

Solution

Exercice 1

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise les formules du cours (et un petit télescopage pour la deuxième).

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2} = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+2) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=3}^{n+2} \ln(j) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\ &= \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = \sum_{i=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{4}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{2n} \left(\frac{1}{4}\right)^i - \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^i \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right) \\ &= \frac{4^n-1}{3\times 4^{2n}} \end{aligned}$$

(2) On raisonne, comme demandé, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- initialisation. Pour pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^k k = (-1) = \frac{(-1)^1(2\times 1+1)-1}{4}$$

et la formule est vraie.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1)\\
&= \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) \qquad \text{par HR}\\
&= \frac{(-1)^n(2n+1)-1+4(-1)^{n+1}(n+1)}{4}\\
&= \frac{(-1)^n(2n+1-4n-4)-1}{4}\\
&= \frac{(-1)^n(-2n-3)-1}{4} = \frac{(-1)^n\times(-1)(2(n+1)+1)-1}{4}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1)-1}{4},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

Exercice 2

(1) On raisonne par récurrence double.

- initialisation. Pour $n = 0$,

$$\frac{1}{5}\left(4^0 + 4(-1)^0\right) = 1 = w_0$$

et, pour $n = 1$,

$$\frac{1}{5}\left(4^1 + 4(-1)^1\right) = 0 = w_1$$

donc la formule est bien vraie pour ces deux premiers indices.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$w_n = \frac{1}{5}\left(4^n + 4(-1)^n\right) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \frac{1}{5}\left(4^{n+1} + 4(-1)^{n+1}\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= 3w_{n+1} + 4w_n \\ &= 3\left(\frac{1}{5}\left(4^{n+1} + 4(-1)^{n+1}\right)\right) + 4\left(\frac{1}{5}\left(4^n + 4(-1)^n\right)\right) \\ &= \frac{1}{5}\left((3 \times 4 + 4)4^n + 4(-3+4)(-1)^n\right) && \text{par HR} \\ &= \frac{1}{5}\left(4^{n+2} + 4(-1)^{n+2}\right) && \text{car } (-1)^{n+2} = (-1)^n \end{aligned}$$

C'est bien la formule au rang $n+2$ ce qui termine la récurrence et prouve que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Cette équation admet pour solutions $q_1 = -1$ et $q_2 = 4$. On constate que w_n est combinaison linéaire de puissance des deux solutions. C'est un fait général qu'on va voir dans le protocole d'étude des suites à récurrence linéaire d'ordre 2.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{2u_n + 1}{1 + u_n} \end{cases}.$$

(1) On utilise la définition par récurrence de la suite

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{2u_0 + 1}{1 + u_0} = \frac{3}{2}, \quad u_2 = \frac{2u_1 + 1}{1 + u_1} = \frac{8}{5}, \quad u_3 = \frac{2u_2 + 1}{1 + u_2} = \frac{21}{13}.$$

(2) La fonction $f : x \mapsto (2x+1)/(1+x)$ est définie (et dérivable) sur $[1, 2]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Observant (ce qui simplifie la vie) que, pour tout $x \in [1; 2]$,

$$f(x) = \frac{2x + 2 - 1}{1 + x} = 2 - \frac{1}{1 + x},$$

on a

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $[1, 2]$:

x	1	2
$f'(x)$	$+$	
f	$\frac{3}{2}$ $\nearrow$	$\frac{5}{3}$

(3) On montre alors que $1 \leq u_n \leq 2$ par récurrence:

- <u>initialisation:</u> pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ qui vérifie bien $1 \leq u_0 \leq 2$.

- hérédité: supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $1 \leq u_n \leq 2$. Alors, par croissance de f sur $[1;2]$, les inégalités sont préservées
$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2).$$
Or, $f(1) = 3/2 \geq 1$, $f(2) = 5/3 \leq 2$ et bien sûr $f(u_n) = u_{n+1}$. Au final, on a bien
$$1 \leq f(1) \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(2) \leq 2$$
et la récurrence est bien démontrée.

(4) On procède également par récurrence en utilisant la croissance de f. On montre donc que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq u_{n+1}$.

- initialisation: pour $n = 0$, d'après la première question, on a bien $u_0 \leq u_1$.
- hérédité: supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$. Alors, appliquer f préserve l'inégalité car f est croissante, et on obtient
$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2},$$
et la récurrence est ainsi démontrée.