Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Interrogation n°3

Mercredi 8 Novembre
Durée : 33 minutes

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Vérifier que, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k$.

(2) En permutant l'ordre de sommation, en déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Vérifier la formule par récurrence.

Exercice 2

On pose $u_0 = -2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$, $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

(1) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et que $u_n < 0$.
(2) Quelles sont, en cas de convergence de la suite (u_n), les valeurs ℓ possibles pour la limite ?
(3) Déterminer la monotonie de (u_n).
(4) Montrer que (u_n) converge vers une limite à préciser.
(5) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de son terme général puis de celui de (u_n). Est-ce cohérent avec la valeur de la limite trouvée ci-avant ?

Exercice 3

On introduit les deux suites (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.
(2) Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. En déduire leur nature.