Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Interrogation n°3

Solution

Exercice 1

Cet exercice faisait partie du Devoir Maison des vacances d'automne. On l'avait bien préparé à ce moment là et on a donc su le refaire sans difficulté. Sinon, c'est qu'on ne fait pas le boulot correctement.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) En observant que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} 1 = k$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k \sum_{j=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.

(2) Attention, ici le deuxième indice j dépend du premier indice k. On est donc scrupuleux:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 \leq j \leq n \\ j \leq k \leq n \end{array}\right. ,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{j-1} 2^k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - \frac{1-2^j}{1-2}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(2^{n+1} - 2^j\right) \\
&= n2^{n+1} - \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + 1 \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$

On vérifie la formule par une récurrence rapide.

- initialisation. Pour $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2$. D'autre part, $(1-1)2^2 + 2 = 2$ donc c'est bon.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} = 2n2^{n+1} + 2 \\ &= ((n+1)-1)2^{n+2} + 2,\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine cette récurrence.

Exercice 2

On pose $u_0 = -2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$, $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

(1) Procédons donc par récurrence. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n < 0$.

- initialisation. Par donnée de l'énoncé, $u_0 = -2 > 0$.
- hérédité. Supposons alors que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, u_n soit bien défini et qu'il soit strictement négatif. Alors, en particulier, $u_n \neq 3/2$ et on peut calculer $u_{n+1} = u_n/(3-2u_n)$. Ainsi, le terme d'indice $n+1$ est encore bien défini. Comme $u_n < 0$, il suit que $3 - 2u_n > 0$ mais alors le quotient définissant u_{n+1} est donc strictement négatif, ce qui termine la récurrence.

(2) Supposons que (u_n) soit convergente avec pour limite une certaine valeur ℓ. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$, on a alors $\ell \leq 0$.
En introduisant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{3-2x}$ qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}_-$ (comme quotient de fonctions affines dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-$), le passage à la limite dans la relation de récurence donne

$$\ell = f(\ell) \iff \frac{\ell}{3-2\ell} = \ell \iff 2\ell^2 - 2\ell = 0.$$

Or $\ell \leq 0$ et la seule solution possible est alors $\ell = 0$. En cas de convergence de la suite (u_n), la limite sera nécessairement 0.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Observons que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(u_n - 1)}{3 - 2u_n}.$$

Comme on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$, tous les termes de ce quotient sont (strictement) positifs. On en conclut que la suite (u_n) est (strictement) croissante.

(4) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0: elle est donc convergente par application du théorème de convergence monotone. D'après ce qui précède, elle converge alors vers 0.

(5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche donc à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} \\ &= \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n}{3-2u_n}-1} = \frac{u_n}{3-2u_n} \times \frac{3-2u_n}{u_n-3+2u_n} \\ &= \frac{u_n}{3u_n-3} = \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = u_0/(u_0-1) = 2/3$ et de raison $1/3$. On en déduit immédiatement l'expression de son terme général

$$v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3^{n+1}}.$$

On revient alors à l'expression de u_n en fonction de v_n:

$$v_n = \frac{u_n}{u_n-1} \Longleftrightarrow u_n = \frac{v_n}{v_n-1} = \frac{2/3^{n+1}}{2/3^{n+1}-1} = \frac{2}{2-3^{n+1}}.$$

Comme $3^{n+1} \to +\infty$, l'algèbre des limites permet bien de retrouver que $u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, ce qu'on avait déjà obtenu auparavant avec une approché différente.

Exercice 3

On introduit les deux suites (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

(1) On montre que la différence est négative, en utilisant l'expression conjuguée. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}} < 0, \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

(2) Afin de montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, il faut vérifier les quatre critères définissant de telles suites. On commence par évaluer $a_n - b_n$ afin de savoir laquelle est deux suites est supérieure à l'autre:

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \\ &= 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $a_n \geq b_n$. Il reste à montrer que $a_n - b_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, que (a_n) est décroissante et que (b_n) est croissante. Pour la première condition, on observe que

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

d'après la première question de l'exercice. Ainsi, (a_n) est décroissante. La croissance de (b_n) se montre de manière totalement analogue et on omet le détail ici. Au final, les deux suites sont bien adjacentes. On peut en conclure que, par le théorème du même nom, les deux suites convergent vers une même limite.