Math 1NSD2. 2023-2024

F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Interrogation n°4

Solution

Exercice 1

(1) On montre la convergence en travaillant sur le terme général ou directement sur la suite des sommes partielles:

$$(i)\ \frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n} = 4(n^2+2n+1)\left(\frac{-2}{5}\right)^n$$
$$= 4(n(n-1)+3n+1)\left(\frac{-2}{5}\right)^n$$
$$= \frac{16}{25}n(n-1)\left(\frac{-2}{5}\right)^{n-2} + \frac{(-24)}{5}n\left(\frac{-2}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{-2}{5}\right)^n$$

et on reconnait une combinaison de séries géométriques (dérivées) de raison $(-2/5)$ donc convergentes. Ainsi, notre série converge et sa somme est égale à la combinaison des sommes des séries susmentionnées. On obtient donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n} = \frac{16}{25}\times\frac{2}{\left(1+\frac{2}{5}\right)^3} - \frac{24}{5}\times\frac{1}{\left(1+\frac{2}{5}\right)^2} + 4\times\frac{1}{1+\frac{2}{5}}$$
$$= \frac{16}{25}\times\frac{2\times 5^3}{7^3} - \frac{24}{5}\times\frac{5^2}{7^2} + 4\times\frac{5}{7}$$
$$= \frac{160-840+980}{7^3}$$
$$= \frac{300}{7^3}.$$

$$(ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Ici, on calcule explicitement la somme partielle, comme somme télescopique, et on passe à la limite.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+3}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+3}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\ &= \sum_{j=4}^{n+3}\frac{1}{\sqrt{j}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

La série est donc convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+3}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

(2) On considère donc la série $\sum_{n\geq 0} w_n$, où

$$w_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}.$$

Commençons par observer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n\geq 0$. De plus, on a reconnu dans l'expression de w_n la somme partielle d'une série exponentielle de paramètre 4 qui est donc majorée par sa somme (infinie) qui vaut e^4. Ainsi, on peut écrire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$0\leq w_n\leq 2^{-n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4^k}{k!}=e^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Mais, la série $\sum(1/2)^n$ est convergente (c'est une série géométrique de raison $1/2$ avec $|1/2|<1$) donc, en multipliant par une constante, la série $\sum e^4(1/2)^n$ est aussi convergente.
Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut donc conclure que $\sum w_n$ est convergente.

Exercice 2

Soient E un ensemble et $A, B, C\in\mathcal{P}(E)$ trois parties de E.

(1) Pour montrer que $A\subset B\subset C$, il faut d'abord montrer que $A\subset B$, puis que $B\subset C$.
Soit alors $x\in A$. Comme $x\in A$, x est en particulier dans $A\cup B$ et par hypothèse, $A\cup B=B\cap C$ donc $x\in B\cap C$ et en particulier $x\in B$. On a donc bien $A\subset B$.

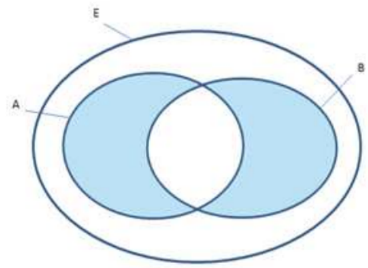
Soit maintenant $x\in B$. Montrons que $x\in C$. Comme $x\in B$, $x\in B\cup A=B\cap C$ et on a bien $x\in C$ donc $B\subset C$. Au final, on a montré

$$A\subset B\subset C.$$

(2) On définit maintenant ce qui s'appelle la *différence symétrique* des ensembles A et B.

$$A\Delta B=\{x\in A\cup B:\ x\notin A\cap B\}.$$

(a) On représente ci-dessous (en bleu ciel), en bleu, la différence symétrique $A\Delta B$.



(b) Par définition

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}),$$

où la dernière égalité découle des lois de Morgan. Mais maintenant, il s'agit d'utiliser les règles de développement de $\cap$ et $\cup$:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) &= ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})\end{aligned}$$

car $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $B \cap \overline{B} = \emptyset$. Au final, c'est exactement l'égalité souhaitée.

(c) On peut utiliser la question précédente:

$$\begin{aligned}A\Delta A &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A}) = \emptyset \\ A\Delta\emptyset &= (A \cap \overline{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \overline{A}) = A \\ A\Delta E &= (A \cap \overline{E}) \cup (E \cap \overline{A}) = \overline{A} \\ A\Delta\overline{A} &= (A \cap \overline{\overline{A}}) \cup (\overline{A} \cap \overline{A}) = E.\end{aligned}$$

Exercice 3

Dans cet exercice, il est important d'adopter une certaine rigueur mathématique afin de s'assurer d'un raisonnement cohérent. Notons donc E l'ensemble de tous les salariés de l'entreprise. D'après l'énoncé, on sait que $\mathrm{Card}(E) = 800$. Puis, introduisons les sous-ensembles de E suivants:

- H l'ensemble des salariés qui sont des hommes (ainsi $\overline{H}$ correspond aux femmes salariées de l'entreprise) et on sait que $\mathrm{Card}(H) = 300$;
- S l'ensemble des salariés membres d'un syndicat, on sait aussi que $\mathrm{Card}(S) = 352$;
- M l'ensemble des salariés qui sont mariés dont le cardinal vaut $\mathrm{Card}(M) = 424$.

Avec ces notations, le nombre recherché est exactement le cardinal de $\overline{H} \cap \overline{S} \cap \overline{M}$. Or, d'après les lois de Morgan, cet ensemble est le complémentaire de $H \cup S \cup M$. On va donc commencer par déterminer le cardinal de cette réunion que l'on soustraira au cardinal de E pour obtenir la quantité recherchée. D'après la formule du crible de Poincaré, on a

$$\mathrm{Card}(H \cup S \cup M) = \mathrm{Card}(H) + \mathrm{Card}(S) + \mathrm{Card}(M) - \mathrm{Card}(H \cap S) - \mathrm{Card}(S \cap M) - \mathrm{Card}(M \cap H) + \mathrm{Card}(H \cap S \cap M).$$

Mais le texte nous donne la valeur de tous ces nombres. On a donc

$$\mathrm{Card}(H \cup S \cup M) = 300 + 352 + 424 - 188 - 208 - 166 + 144 = 658.$$

Il suit que

$$\mathrm{Card}(\overline{H} \cap \overline{S} \cap \overline{M}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(H \cup S \cup M) = 800 - 658 = 142,$$

il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées dans cette entreprise.