Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°1

À rendre le 27/09

Exercice 1

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (carreau et coeur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie 1 - Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur du rang d'apparition du premier roi rouge.

(1) (Simulation avec Python).

(a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable X.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n):
    y=1
    T=2*n #nombre de cartes à retourner
    while ............ :
        .........
        .........
    return .......
```

(b) Écrire une fonction `freq(L)` qui, prenant en argument une liste de valeurs `L` (dont les composantes sont des entiers entre 1 et ℓ), renvoie une liste dont les composantes sont les fréquences d'apparitions des valeurs de la liste `L`.

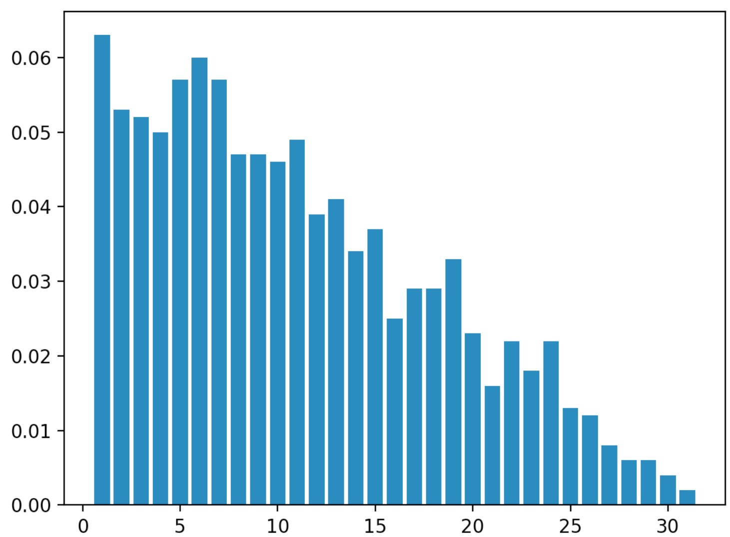
(c) On prend $n = 16$. On ajoute les commandes suivantes qui permettent l'affichage ci-après:

```python
import matplotlib.pyplot as plt

n=16
sample=[simul_X(n) for k in range(1000)]
valeurs=[k for k in range(1, 2*n)]
frequences=freq(sample)

plt.bar(valeurs, frequences)
plt.show()
```

Affichage Python



(i) Quelles instructions permettent d'obtenir une *estimation* de $E(X)$?
(ii) Donner une estimation graphique de $P(X = 1)$. Que vaut vraiment $P(X = 1)$?. Donner des estimations de $P(X = 2), P(X = 3)$.

(2) Que vaut $X(\Omega)$?
(3) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \frac{2n - k}{n\,(2n - 1)}.$$

(4) Montrer que $E(X) = \dfrac{2n + 1}{3}$.

Le joueur perd un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.

(5) Exprimer G_1 en fonction de a et X. En déduire l'expression de $E(G_1)$ en fonction de a et n.

(6) Avec quelles instructions supplémentaires peut-on simuler G_1?

Partie 2 - Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur perd un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

(7) Écrire, en reprenant une partie du programme précédent, une fonction `simul_G_2(a,n)`, qui simule la variable G_2.

(8) Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, déterminer $P(G_2 = a-k)$.

(9) Vérifier que

$$P(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2(2n-1)}.$$

(10) Obtenir alors que

$$E(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}.$$

(11) On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer (éventuellement avec l'aide de Python, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t, & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(1) (a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall t \in [0,x]$

$$\frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2}.$$

(b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

(c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

(2) (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x),$$

où g est une fonction que l'on déterminera.

(b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(3) (a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\dfrac{t}{e^t+1} \leq 1$.

(b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(4) (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation

$$(E_n) \qquad \frac{2n}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t = 1$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on notera u_n.

(b) Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est sa limite lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 3*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une urne contient initialement $n-1$ boules blanches et une boule noire. On dispose de la fonction Python ci-dessous qui renvoie la simulation de deux variables aléatoires X et Y.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    nN=1
    X=0
    k=0
    while nN == 1 :
        k=k+1
        p= nN/n
        boule = rd.binomial(1, p)
        if X == 0 :
            X=boule*k
        if 2*np.floor(k/2) != k :
            nN=nN-boule
            n=n-1
    Y=k
    return [X,Y]
```

(1) Décrire l'expérience et ce à quoi correspondent les variables aléatoires X et Y.

(2) Déterminer la loi de Y.