Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°1

Solution

Exercice 1

Partie 1 - Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur du rang d'apparition du premier roi rouge.

(1) (Simulation avec Python).

(a) Il y a toujours, jusqu'à la première pioche du roi rouge, 2 rois rouges et T cartes en tout, la probabilité de piocher un roi rouge est donc égale à $2/T$ et on continue à piocher tant qu'on a autre chose. Le programme est donc le suivant :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n):
    y=1
    T=2*n #nombre de cartes à retourner
    while rd.random() > 2/T :
        T=T-1 # une carte en moins
        y=y+1 # une pioche de plus
    return y
```

(b) On commence par remplir la liste des effectifs et on divise ensuite pour la liste des fréquences.

```
def freq(L) :
    l=max(L)
    eff=[0]*l
    for k in range(len(L)) :
        eff[L[k]-1]+=1
    return [eff[k]/len(L) for k in range(l)]
```

(c) (i) Une valeur approchée de l'espérance de X est donnée par la moyenne empirique de l'échantillon de X, donc par la commande `np.mean(sample)`.

(ii) La fréquence d'apparition de la valeur 1 (resp. 2, 3) donne une valeur approchée de $P(X=1)$ (resp. $P(X=2), P(X=3)$). On lit donc la hauteur du bâton correspondant sur la figure. On a

$$P(X=1) \simeq 0.065, \qquad P(X=2) \simeq 0.052, \quad P(X=3) = 0.051.$$

(2) On peut piocher le premier roi rouge dès le premier coup mais on peut aussi, dans le cas extrême, piocher toutes les autres cartes (il y en a $2n-2$) avant d'obtenir le premier roi rouge à la $(2n-1)$-ème pioche. Toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, on a

$$X(\Omega) = [\![1, 2n-1]\!].$$

(3) Commençons par introduire les évènements R_j "la carte retournée à la $j-$ème pioche est un roi rouge".
Soit $k \in X(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{R}_j \cap R_k\right) \\
&= P(\overline{R}_1)P_{\overline{R}_1}(\overline{R}_2)...P_{\bigcap_{j=1}^{k-2}\overline{R}_j}(\overline{R}_{k-1})P_{\bigcap_{j=1}^{k-1}\overline{R}_j}(R_k) \qquad \text{(formule des probabilités composées)} \\
&= \frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2n-2-(k-2)}{2n-(k-2)} \times \frac{2}{2n-(k-1)} \\
&= \frac{(2n-k+1)(2n-k)}{2n(2n-1)} \times \frac{2}{2n-k+1} \qquad \text{(par télescopage)} \\
&= \frac{2n-k}{n(2n-1)},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(4) Par définition de l'espérance et par la formule de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} kP(X=k) = \frac{1}{n(2n-1)}\left(2n\sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2\right) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\left(2n\frac{(2n-1)2n}{2} - \frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6}\right) \\
&= 2n - \frac{4n-1}{3} \\
&= \frac{2n+1}{3},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Easy.

(5) Sans difficulté d'après ce qui précède, on a $G_1 = a - X_1$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit donc que

$$E(G_1) = a - E(X_1) = a - \frac{2n+1}{3}.$$

(6) C'est cadeau

```
def simul_G1(a,n) :
    return a-simul_X(n)
```

Partie 2 - Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur perd un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

(7) La différence avec le programme précédent et qu'on s'arrête, quoi qu'il arrive, après au plus n cartes retournées.

```python
def simul_G2(a,n) :
    T=2*n
    y=1
    while y<n :
        if rd.random() < 2/T :
            return a-y
        y=y+1
        T=T-1
    return -n
```

(8) Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Dans ce cas, $P(G_2 = a-k) = P(X=k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$.

(9) En revanche,

$$\begin{aligned} P(G_2=-n) &= P\left(\bigcap_{j=1}^{n} \overline{R}_j\right) \\ &= P(\overline{R}_1)\cdots P_{\bigcap_{j=1}^{n-1}\overline{R}_j}(\overline{R}_n) \\ &= \frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \ldots \times \frac{2n-2-(n-2)}{2n-(n-2)} \times \frac{2n-2-(n-1)}{2n-(n-1)} \\ &= \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}. \end{aligned}$$

(10) Le calcul est un poil.. tenace. On se retrousse les manches et c'est parti.

$$\begin{aligned} E(G_2) &= \sum_{k=1}^{n}(a-k)P(G_2=a-k) - nP(G_2=-n) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(a-k)\frac{2n-k}{n(2n-1)} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \\ &= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{2na}{n}\sum_{k=1}^{n}1 - \frac{a+2n}{n}\sum_{k=1}^{n}k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2\right) - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \\ &= \frac{1}{2n-1} \times \frac{(12n-3(n+1))a - 6n(n+1) + (n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3n(n-1)}{6(2n-1)} \\ &= \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}, \end{aligned}$$

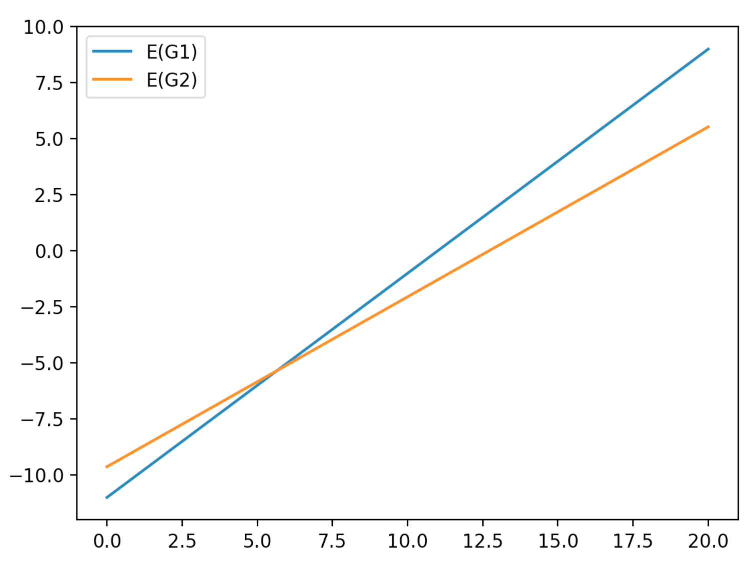
ce qui est la formule attendue ! Ouf !

(11) On peut représenter graphiquement et simultanément l'évolution de $E(G_1)$ et $E(G_2)$ en fonction de a. Notons que $n = 16$ et $2n + 1 = 33$.

```
def E_G_1(a) :
    return a-11

def E_G_2(a) :
    n=16
    return (3*(3*n-1)*a-(7*n**2-1))/(6*(2*n-1))

A=np.linspace(0, 20, 100)
Y=[E_G_1(a) for a in A]
Z=[E_G_2(a) for a in A]

plt.plot(A, Y, label="E(G1)")
plt.plot(A, Z, label="E(G2)")
plt.legend()
```

Ceci donne la figure ci-après. On voit que le protocole 2 est plus avantageux pour le joueur si le gain a est inférieur ou égal à 5 euros. À partir de 6 euros, c'est le protocole 1 qui est plus avantageux au joueur.
Cela dit, le jeu est vraiment favorable au joueur avec au moins une récompense de 11 euros pour le roi rouge et dans ce cas on choisira le protocole 1.

Affichage Python



Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2011**.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t, & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(1) (a) Par croissante de la fonction exponentielle, si $0 \le t \le x$, on a

$$\begin{aligned} 1 \le e^t \le e^x &\implies 2 \le e^t + 1 \le e^x + 1 \\ &\implies \frac{1}{e^x+1} \le \frac{1}{e^t+1} \le \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) En multipliant par t l'encadrement précédent, on obtient

$$\frac{t}{e^x+1} \le \frac{t}{e^t+1} \le \frac{t}{2}$$

Par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), il suit que

$$\frac{x^2}{2(e^x+1)} = \int_0^x \frac{t}{e^x+1}\mathrm{d}t \le \int_0^x \frac{t\mathrm{d}t}{e^t+1} \le \int_0^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t = x^2.$$

En multipliant par $2/x^2$, on a bien

$$\frac{1}{e^x+1} \le f(x) \le \frac{1}{2}.$$

(c) Les deux termes qui encadrent $f(x)$ tendent tous deux vers $1/2$ en 0. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0),$$

et f est bien continue (à droite) en 0.

(2) (a) La fonction

$$\varphi :\ t \mapsto \frac{t}{e^t+1}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t$$

est alors la primitive de φ qui s'annule en 0. À ce titre, elle est bien sûr $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, la fonction

$$x \mapsto \frac{2}{x^2}$$

est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme multiple de l'inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas. Par produit, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t + \frac{2}{x^2} \times \frac{x}{e^x+1} \\ &= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t + \frac{4}{x^3} \times \frac{x^2}{2(e^x+1)} \\ &= -\frac{4}{x^3} g(x), \end{aligned}$$

où on a posé

$$g(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t - \frac{x^2}{2(e^x+1)}.$$

(b) On commence par dériver g

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x}{e^x+1} - \frac{4x(e^x+1)-2x^2e^x}{4(e^x+1)^2} \\ &= \frac{4x(e^x+1)-4x(e^x+1)+2x^2e^x}{4(e^x+1)^2} \\ &= \frac{x^2e^x}{2(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

quantité strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Étant clair que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (les mêmes arguments que pour le caractère $\mathcal{C}^1$ de f s'appliquent), g est en fait croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0)=0$, on peut conclure que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Il suit alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x) < 0,$$

et f est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(3) (a) Observant que

$$\frac{t}{e^t+1} \leq 1 \Longleftrightarrow e^t+1 \geq t \Longleftrightarrow e^t \geq t-1$$

on peut par exemple voir que, pour tout $t>0$

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} > 1+t > t-1.$$

(b) Par positivité de l'intégrale, l'inégalité précédente donne

$$0 \leq \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \mathrm{d}t = x$$

puis, en multipliant par $2/x^2$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}.$$

Les deux termes qui encadrent $f(x)$ tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$, par le théorème des gendarmes, on peut conclure que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(4) (a) D'après ce qui précède et grâce au théorème de bijection, f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left]0;\frac{1}{2}\right]$.
En particulier, pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{1}{n} \in \left]0;\frac{1}{2}\right]$ et admet donc un unique antécédent, noté u_n, par f dans $\mathbb{R}_+$. Or,

$$f(x) = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \frac{2n}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi, u_n est bien l'unique solution de (E_n).

(b) Le théorème de bijection permet d'affirmer que f^{-1} est également (continue) et strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$. Ainsi, comme

$$f(u_n) = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

on a

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Longrightarrow u_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) > f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = u_n$$

et (u_n) est (strictement) croissante. En tant que suite croissante, (u_n) est soit convergente soit divergente vers $+\infty$ (par le théorème de convergence monotone). Ici, on peut dire, par continuité de f^{-1} sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$, que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to 0^+} f^{-1}(t) = +\infty.$$

Exercice 3*

(1) Il y a n boules dans l'urnes dont une seule noire. Un paramètre p est introduit, qui devient ensuite le paramètre d'une Bernoulli. La valeur de p est nN/n. Comme la variable `nN` est initialisée à 1, on s'intéresse au fait de piocher la boule noire. La variable `boule` contient donc le résultat d'une pioche : 1 si on pioche la noire, 0 sinon. Tant qu'il y a encore la boule noire dans l'urne, on continue à piocher et on compte (avec la variable `k`) le nombre de tirages.
Les variables n et nN ne sont modifiées que si k est impair. Ains, selon la parité du numéro du tirage on remet ou non la boule piochée dans l'urne.
Comme la variable `boule` vaut 0 ou 1 et que `X` est initialisée à 0. X va prendre la valeur du numéro k du tirage amenant pour la première fois la boule noire.
Comme Y renvoie la valeur du rang où la boucle s'arrête et que celle-ci s'arrête quand il n'y a plus de noire, Y correspond au numéro du tirage amenant pour la dernière fois la boule noire.

(2) On peut avoir la boule noire dès le premier tirage. Au, pire on peut attendre d'avoir vidé l'urne de ses boules blanches, ce qui veut dire que lors des $n-1$ premiers tirages pairs, on pioche une blanche, ainsi on aura forcément une boule noire au $2(n-1)+1 = (2n-2)-$ième tirage. Naturellement, il est possible d'avoir la noire lors de tous les tirages intermédiaires, ainsi on a bien $X(\Omega) = [\![1, 2n-2]\!]$.

En revanche, pour que ce soit la dernière fois qu'on obtienne la boule noire, il faut que ce tirage intervienne à un rang impair, ce qui arrive au plus tôt dès le premier tirage ou au plus tard, avec la justification précédente, un cran plus loin que le rang le plus tardif de la première noire (auquel cas on aurait toutes les blanches successivement et puis deux fois la noire). Ainsi, on a bien $Y(\Omega) \subset [\![1, 2n-1]\!]$.

Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, on note B_k (resp. N_k) l'évènement "la boule piochée au $k-$ième tirage est blanche (resp. noire)".

- Soit $j \in [\![1, 2n-1]\!]$. $[Y = j]$ impose que j soit le rang d'un tirage après lequel on retire la boule noire, sinon il serait encore possible de la tirer. Or, on ne retire des boules de l'urne qu'après les tirages de rang impair. Donc, si j est pair, $[Y = j]$ n'est pas possible et $P(Y = j) = 0$.

- Soit $j = 2i-1$ un entier impair de $Y(\Omega)$ (avec donc $i \in [\![1, n]\!]$).

  $[Y = 2i-1]$ si et seulement si on pioche pour la dernière fois la boule noire au tirage $2i-1$, ce qui veut dire qu'on a pas pioché la boule noire à un tirage de rang impair antérieur, sinon celle-ci ne serait plus dans l'urne. Les résultats des tirages de rang pair ne jouent pas de rôle dans la description de $[Y = 2i-1]$. Ainsi, $[Y = 2i-1]$ si et seulement si tous les tirages de rang impair antérieur (et il y en a $(i-2)$) ont amené une boule blanche, et on peut donc écrire

$$[Y = 2i-1] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-2} B_{2k-1}\right) \cap N_{2i-1}.$$

Connaissant le nombre de boules blanches retirées, on connait la probabilité d'obtenir une blanche ou une noire à un nouveau tirage. D'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} P(Y=2i-1) &= P(B_1)P_{B_1}(B_3) \times ... \times P_{\bigcap_{k=1}^{i-3} B_{2k-1}}(B_{2i-3})P_{\bigcap_{k=1}^{i-2} B_{2k-1}}(N_{2i-1}) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times ... \times \frac{n-1-(i-3)}{n-(i-3)} \times \frac{1}{n-(i-2)} \\ &= \frac{1}{n} \qquad \text{(par télescopage des quotients)} \end{aligned}$$