Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°2

Solution disponible le 01/11

Ce devoir maison est à faire en 4h pour s'entraîner en vue du Concours Blanc de Novembre. On pourra naturellement poursuivre le travail sur ce sujet à l'issue des 4h, notamment à l'aide de la solution qui sera publiée en ligne dans le courant des vacances.

Exercice 1

On considère les matrices $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - \frac{1}{3}I$.

(1) Déterminer le rang de B. En déduire une valeur propre immédiate de B.

(2) Écrire un programme Python d'en-tête `def poly_mat(P, M) :` qui, prenant en argument une liste `P=[`a_0`, `a_1`, ..., `a_n`]` et une matrice carrée M renvoie la matrice

$$a_0 I + a_1 M + ... + a_n M^n.$$

(3) On suppose la fonction précédente écrite correctement. À l'aide des instructions ci-dessous et de leur résultat d'exécution présenté ci-contre, déterminer un polynôme annulateur de B.

```python
import numpy as np

B=np.array([[0, 1/3, 1/3], [2/3, 0, 0], [2/3, 0, 0]])
P=[0, -4, 0, 9]
print(poly_mat(P, B)
```

Affichage Python

```
> > >
[[0., 0., 0.]
[0., 0., 0.]
[0., 0., 0.]]
```

(4) Déterminer une matrice diagonale D de dernière ligne nulle et une matrice inversible P de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ telles que $B = PDP^{-1}$.

(5) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $B^j = PD^jP^{-1}$.

(6) Expliciter la matrice P^{-1}.

(7) Établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$A^k = P\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j\right) P^{-1}.$$

(8) Expliciter, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la première ligne de A^k.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on considère une variable aléatoire X à valeurs positives définie sur un certain espace probabilisé, de fonction de répartition F.
On considère également une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X. On note alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$Y_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

On admet que Y_n est encore une variable aléatoire, définie sur le même espace probabilisé, et on note F_n sa fonction de répartition.

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance mais s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance. Auquel cas, on appelle **indice d'implosion** le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

On suppose que X est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(1) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

(2) (a) Montrer que

$$P(X = k) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2k\sqrt{k}}.$$

(b) En déduire que X n'admet pas d'espérance.

(3) Expliciter, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F(k)$.

(4) (a) Déterminer la loi de Y_2. Admet-elle une espérance?
(b) Mêmes questions avec Y_3.
(c) La loi de X est-elle implosive? Si oui, quelle est son indice d'implosion?

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} u_n$.

(1) Montrer que (u_n) et décroissante. Montrer ensuite qu'elle converge vers une limite $\ell \in [0; 1]$.

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = n^\alpha u_n, \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n).$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right).$$

(b) En déduire l'existence d'une réel β (à exprimer en fonction de α tel que

$$w_n \sim \frac{2\alpha-3}{2n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$

(c) Montrer qu'il existe une unique valeur α_0 de α que l'on précisera pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.

(d) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$ en fonction de u_{n+1}.

(e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}$, $\quad n \to +\infty$.

(f) Quelle est alors la valeur de ℓ?

Problème

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

- B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
- R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

(1) Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_S(n):
    b=1
    r=2
    s=0
    for k in range(1, n+1):
        if .............. :
            ...........
        else :
            ...........
    return s
```

(2) On exécute le programme suivant :

```
n=10
mystere=[simul_S(n) for k in range(1000)]
print(np.mean(mystere))
```

On obtient `6.657`. Comment interpréter ce résultat?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

(3) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(Y=n)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

(b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance? une variance?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

(4) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(5) Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

(6) (a) Déterminer les probabilités $P((X_1=i)\cap(X_2=j))$ pour $(i,j)\in [\![0;1]\!]^2$.

(b) En déduire la loi de X_2.

(7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0;n]\!]$.

(a) Calculer

$$P(R_1\cap\ldots\cap R_k\cap B_{k+1}\cap\ldots\cap B_n).$$

(b) Justifier que

$$P(S_n=k)=\binom{n}{k}P(R_1\cap\ldots\cap R_k\cap B_{k+1}\cap\ldots\cap B_n),$$

puis en déduire que

$$P(S_n=k)=\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

(8) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et $E(S_n)=\dfrac{2n}{3}$.

(9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$,

$$P_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1)=\frac{k+2}{n+3}.$$

(b) En déduire que

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{E(S_n)+2}{n+3}.$$

(c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on?

Partie IV : Étude d'une fonction de répartition et de sa limite

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

(10) Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$P(T_n \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(11) Soit $x \in [0;1]$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P\left(T_n \leqslant x\right) = \frac{\left(\lfloor nx \rfloor + 1\right)\left(\lfloor nx \rfloor + 2\right)}{(n+1)(n+2)}$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

(12) En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(T_n \leq x) = x^2.$$