Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°2

Solution

Exercice 1

On considère les matrices $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - \frac{1}{3}I$.

(1) On commence par former la matrice $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On observe que les deux dernières colonnes de B sont les mêmes mais les deux premières sont clairement non colinéaires. Ainsi, les deux premières colonnes de B forment une base de son image et donc $\mathrm{rg}(B) = 2$. En particulier, B n'est pas inversible et 0 en est une valeur propre.

(2) On rappelle que la commande `matrix_power(M, k)` de la bibliothèque `numpy.linalg` (qu'on importe sous l'alias `al`) renvoie la puissance k d'une matrice M. Le programme s'écrit alors avec une boucle `for`.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def poly_mat(P,M) :
    m=len(M)
    n=len(P)
    X=P[0]*np.eye(m)
    for k in range(1, n+1):
        X=X+P[k]*al.matrix_power(M, k)
    return X
```

(3) La matrice B est bien celle explicitée ci-dessus et le polynôme P est

$$P(X) = -4X + 9X^3 = X(9X^2 - 4)$$

le résultat affiché correspondant à la matrice nulle, on en déduit que P est un polynôme annulateur de B.

(4) Le polynôme annulateur P explicité ci-dessus admet pour racines 0, 2/3 et $-2/3$. Si on sait déjà que 0 est bien valeur propre, il faut vérifier que les deux autres racines le sont bien également, tout en déterminant une base de chaque sous-espace propre associé. C'est parti.

- Pour 2/3.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(B - \frac{2}{3}I\right) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x+y+z & = & 0 \\ 2x-2y & = & 0 \\ 2x-2z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \\ y & = & x \end{array} \right.$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, 2/3 est bien valeur propre et $E_{2/3}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $-2/3$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(B + \frac{2}{3}I\right) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 0 \\ 2x+2y & = & 0 \\ 2x+2z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & -x \\ y & = & -x \end{array} \right.$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $-2/3$ est bien valeur propre et $E_{-2/3}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour 0.

On sait déjà que 0 est valeur propre et comme le rang de B vaut 2, on sait que la dimension de son noyau vaut 1. Il suffit de trouver un vecteur non nul dans le noyau de B pour avoir une base. Comme les deux dernières colonnes de B (images par la multiplication par B des deux derniers vecteurs de la base canonique) sont les mêmes, on en déduit que $e_2 - e_3$ est dans le noyau de B et ainsi

$$E_0(B) = \operatorname{Ker}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On a trois valeurs propres distinctes, on peut extraire par concaténation une famille de vecteurs de propres de B composée de 3 vecteurs qui est libre et forme donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ rendant ainsi B diagonalisable. En posant

$$D = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de base donne bien

$$B = PDP^{-1}$$

et les matrices D et P satisfont bien les conditions demandées.

(5) C'est une récurrence classique déjà rencontrée de nombreuses fois.

- <u>initialisation</u>. Pour $j = 1$, on a bien $B^1 = B = PDP^{-1}$ d'après la question précédente.
- <u>hérédité</u>. Supposons que pour un certain $j \in \mathbb{N}^*$, on ait $B^j = PD^jP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} B^{j+1} &= B^jB \\ &= PD^jP^{-1}PDP^{-1} \qquad \text{(HR)} \\ &= PD^jDP^{-1} \\ &= PD^{j+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

et la récurrence est terminée.

(6) On inverse la matrice P à l'aide d'un pivot de Gauss simultané.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi, on peut conclure que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(7) Rappelons que $A = B + \frac{1}{3}I$ et les matrices commutent. Par la formule du binôme, on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B^j \left(\frac{1}{3}I\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} B^j$$

Maintenant, on insère la formule pour B^j et on factorise à gauche par P et à droite par P^{-1}.

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} B^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} (PD^jP^{-1}) = P\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} D^j\right) P^{-1},$$

ce qui est bien la formule attendue.

(8) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
La première ligne de A^k est obtenue par le produit : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^k$.
De plus, d'après la question précédente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} PD^jP^{-1}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} PD^jP^{-1} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(2/3)^j & 0 & 0\\ 0 & (-2/3)^j & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(2/3)^j & -(-2/3)^j & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\left((2/3)^j + (-2/3)^j\right) & (2/3)^j - (-2/3)^j & (2/3)^j - (-2/3)^j\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Observant maintenant que

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}\left(\frac{2}{3}\right)^{j} = 1, \qquad \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}\left(-\frac{2}{3}\right)^{j} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}$$

ce qui donne alors, pour première ligne de A^k :

$$\frac{1}{4}\left(2\left(1+\left(-\tfrac{1}{3}\right)^k\right) \quad 1-\left(-\tfrac{1}{3}\right)^k \quad 1-\left(-\tfrac{1}{3}\right)^k\right).$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on considère une variable aléatoire X à valeurs positives définie sur un certain espace probabilisé, de fonction de répartition F.
On considère également une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X. On note alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$Y_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

On admet que Y_n est encore une variable aléatoire, définie sur le même espace probabilisé, et on note F_n sa fonction de répartition.

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance mais s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance. Auquel cas, on appelle **indice d'implosion** le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

On suppose que X est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X=k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(1) On calcule la limite de la somme partielle, à l'aide d'une somme télescopique. Plus précisément, Si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)\\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \qquad \text{(par télescopage)}\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,
\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat demandé.

(2) (a) On utilise l'expression conjuguée

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \\
&= \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \times \frac{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\left(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k^1+3k+6}\sqrt{k}\left(\sqrt{1+2/k}+\sqrt{1+1/k}\right)} \\
&\sim \frac{1}{2k\sqrt{k}},
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'équivalence attendue.

(b) X admet une espérance si et seulement si la série $\sum kP(X=k)$ converge (absolument). Or, d'après la question précédente,

$$kP(X=k) \sim \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Comme, d'après le critère de Riemann, la série $\sum_{k\geq 1} 1/\sqrt{k}$ diverge, on peut conclure par critère d'équivalence pour les séries, que X n'admet pas d'espérance.

(3) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$\begin{aligned}
F(k) &= P(X \leq k) = \sum_{j=0^k} P(X=j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{j+1}} - \frac{1}{\sqrt{j+2}} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}, \qquad \text{(par télescopage)}
\end{aligned}$$

(4) (a) $Y_2 = \min(X_1, X_2)$, où X_1 et X_2 sont des variables indépendantes qui suivent la même loi que X. Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(Y_2 > k) &= P(X_1 > k \cap X_2 > k) \\
&= P(X_1 > k)P(X_2 > k) \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= P(X_1 > k)^2 \qquad \text{(car } X_1 \text{ et} X_2 \text{ suivent la même loi)} \\
&= (1-F(k))^2 = \frac{1}{k+2}.
\end{aligned}$$

Or,

$$P(Y_2 = k) = P(Y_2 > k-1) - P(Y_2 > k) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sim \frac{1}{k^2}.$$

Donc la série $\sum kP(Y_2 = k)$ diverge (son terme général est équivalent à la série harmonique).

(b) On reprend la méthode précédente.

$$\begin{aligned}
P(Y_3 > k) &= P(X_1 > k \cap X_2 > k \cap X_3 > k) \\
&= P(X_1 > k)P(X_2 > k)P(X_3 > k) \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= P(X_1 > k)^3 \qquad \text{(car } X_1, X_2, X_3 \text{ suivent la même loi)} \\
&= (1-F(k))^3 = \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+2}}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{array}{rcl} P(Y_3 = k) & = & P(Y_3 > k-1) - P(Y_3 > k) \\ & = & \dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} - \dfrac{1}{(k+2)\sqrt{k+2}} \\ & = & \dfrac{(k+2)^3 - (k+1)^3}{(k+1)(k+2)\sqrt{(k+1)(k+2)}\left((k+2)\sqrt{k+2} + (k+1)\sqrt{k+1}\right)} \\ & \sim & \dfrac{3k^2}{2k^3 k^{3/2}} = \dfrac{3}{2k^{5/2}} \end{array}$$

Il suit que

$$kP(Y_3 = k) \sim \frac{3}{2k^{3/2}}$$

et, par équivalence à une série de Riemann convergente, Y_3 admet une espérance.

(c) X n'admet pas d'espérance, Y_2 non plus mais Y_3 oui. Donc, la loi de X est implosive et son indice d'implosion vaut 3.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} u_n$.

(1) On commence par montrer, par récurrence immédiate que $u_n > 0$ pour tout n. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, le produit de quantités strictement positives le restant, c'est encore vrai au rang $n+1$. Ensuite, on observe que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+5} \leq \frac{2n+5}{2n+5} = 1$$

et donc $u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi, (u_n) est bien décroissante. Il suit que $u_n \leq u_1 = 1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1]$. Comme la suite est décroissante et minorée par 0, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que (u_n) converge vers une limite ℓ. De l'encadrement sur les termes de la suite ci-dessus obtenus, on peut conclure que $\ell \in [0;1]$. (*Le passage à la limite transforme les inégalités en inégalités larges.*)

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = n^\alpha u_n, \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n).$$

(a) C'est un calcul, utilisant les propriétés du log. Sans difficulté.

$$\begin{array}{rcl} w_n & = & \ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha u_n\right) \\ & = & \alpha \ln(n+1) + \ln(2) + \ln((n+1)) + \ln(u_n) - \ln(2n+5) - \alpha\ln(n) - \ln(u_n) \\ & = & \alpha\ln(n+1) + \ln((n+1)) - \ln(n+5/2) - \alpha\ln(n) \\ & = & \alpha\ln(n+1) + \ln((n+1)) - \ln\left(1 + \dfrac{5}{2n}\right) - \alpha\ln(n) - \ln(n) \\ & = & (\alpha+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{5}{2n}\right) \end{array}$$

(b) On rappelle que, pour $u \to 0$,

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad u \to 0.$$

Comme

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{5}{2n} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)=\frac{5}{2n}-\frac{25}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il suit que

$$\begin{aligned} w_n &= (\alpha+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{5}{2n}-\frac{25}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{2\alpha-3}{n}+\frac{21-4\alpha}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on a bien la formule attendue en posant

$$\beta=\frac{21-4\alpha}{8}.$$

(c) Pour $\alpha\neq 3/2$, $2\alpha-3\neq 0$ et donc

$$w_n\sim\frac{2\alpha-3}{n},\ n\to+\infty.$$

Par critère d'équivalence pour les séries, comme $\sum\frac{2\alpha-3}{n}$ diverge (multiplie de la série harmonique), il suit que $\sum w_n$ diverge. En revanche, si $\alpha=3/2$, alors $\beta\neq 0$ et

$$w_n\sim\frac{\beta}{n^2},\ n\to+\infty.$$

Cette fois, par convergence de la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$, le critère d'équivalence affirme que $\sum w_n$ converge. On a donc bien

$$\sum w_n \text{ converge } \iff \alpha=\alpha_0=\frac{3}{2}.$$

(d) On reconnait une somme télescopique. En effet

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} w_k &= \sum_{k=1}^{n}(\ln(v_{k+1}-\ln(v_k)) \\ &= \ln(v_{n+1})-\ln(v_1) \qquad \text{(par telescopage)} \\ &= \ln\left((n+1)^{\alpha_0}u_{n+1}\right)-\ln\left(2^{\alpha_0}\cdot(2/5)\right) \end{aligned}$$

(e) D'après la question précédente,

$$\ln\left(n^{\alpha_0}u_n\right)=\sum_{k=1}^{n-1}+\ln(v_1).$$

Comme la série $\sum w_n$ converge, en notant S sa somme, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(n^{\alpha_0}u_n\right)=S+\ln(v_1).$$

En notant alors $C=\exp(S+\ln(v_1))$, on a bien

$$\frac{n^{\alpha_0}u_n}{C}\longrightarrow 1\iff u_n\sim\frac{C}{n^{\alpha_0}}.$$

(f) On a, en particulier, que

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{C}{n^{3/2}}=0.$$

Problème

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

- B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
- R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

(1) Si r et b désignent les nombres de boules rouges et blanches dans l'urne lors du k-ième tirage, la probabilité de tirer une boule rouge lors de ce tirage est $P(R_k) = \dfrac{r}{r+b}$ et l'évènement "$rand() <= \dfrac{r}{r+b}$" est réalisé avec cette même probabilité.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_S(n):
    b=1
    r=2
    s=0
    for k in range(1, n+1):
        if rd.random() <= r/(r+b) :
            r,s=r+1, s+1
        else :
            b=b+1
    return s
```

(2) On exécute le programme suivant :

```python
n=10
mystere=[simul_S(n) for k in range(1000)]
print(np.mean(mystere))
```

On obtient `6.657`. La liste `mystere` contient 1000 simulations de la variable S_n (pour $n = 10$ fixé au préalable). La commande `np.mean()` renvoie la *moyenne* de l'échantillon, c'est à dire une *estimation* ou valeur approchée de l'espérance de S_n. On peut donc conjecturer que

$$E(S_{10}) \simeq 6.657$$

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

(3) Tout d'abord, comme il y remise de boules dans l'urne, il est clair que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
P([Y=n]) &= P(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) \\
&= P(R_1)P_{R_1}(R_2)\cdots P_{\bigcap_{1\le i\le n-2} R_i}(R_{n-1})P_{\bigcap_{1\le i\le n-1} R_i}(B_n) \\
&= \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\cdots\frac{2+(n-2)}{3+(n-2)}.\frac{1}{3+(n-1)} \\
&= \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\cdots\frac{n}{n+1}.\frac{1}{n+2} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}
$$

En justifiant que:

- pour la deuxième égalité, les évènements n'étant pas indépendants (tirages sans remise), on utilise la f**ormule des probabilités composées**.
- pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, on calcule $P_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-1}\cap Rk-1}(R_k)$ en faisant le quotient du nombre de boules rouges dans l'urne $(2+(k-1))$ par le nombre total de boules dans l'urne $(3+(k-1))$.

(4) Comme

$$nP([Y=n]) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n},$$

la série de terme général $nP([Y=n])$ est (positive et) de même nature (par critère d'équivalence) que la série harmonique et donc divergente. Il suit que variable aléatoire Y n'admet pas d' espérance et donc pas de variance non plus.

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

(4) De façon classique, X_k étant le nombre de boules rouges tirées (0 ou 1) au k-ième tirage et S_n le nombre total de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

(5) La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_1 = 1) = P(R_1) = 2/3$. D'après le cours, son espérance est donc $E(X_1) = 2/3$ et sa variance $V(X_1) = (2/3)(1/3) = 2/9$.

(6) (a) On a

$$\begin{aligned} P\left((X_1,X_2)=(0,0)\right) &= P\left(B_1\cap B_2\right) \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left((X_1,X_2)=(0,1)\right) &= P\left(B_1\cap R_2\right) \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left((X_1,X_2)=(1,0)\right) &= P\left(R_1\cap B_2\right) \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left((X_1,X_2)=(1,1)\right) &= P\left(R_1\cap R_2\right) \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) On utilise la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_1=0),(X_1=1)\}$ et les probabilités ci-dessus

$$\begin{aligned} P(X_2=0) &= P(X_2=0\cap X_1=0)+P(X_2=0\cap X_1=1) \\ &= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2=1) &= P(X_2=1\cap X_1=0)+P(X_2=1\cap X_1=1) \\ &= \frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

On constate notamment - ce qui n'était pas clair *a priori* - que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1,2/3)$, tout comme X_1.

(7) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0;n]\!]$.

(a) Comme précédemment, en utilisant la formule des probabilités composées:

$$\begin{aligned} P\left(R_1\cap\ldots\cap R_k\cap B_{k+1}\cap\ldots\cap B_n\right) &= \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdots\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)}\frac{1}{3+k}\frac{2}{4+k}\cdots\frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)} \\ &= \frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdots\frac{2+(k-1)}{3+(k-1)}\frac{1}{3+k}\frac{2}{4+k}\cdots\frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)} \\ &= \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \end{aligned}$$

(b) L'événement $(S_n=k)$ se réalise lorsque sur n tirages, il apparait k boules rouges et $n-k$ boules blanches, dans un ordre indéterminé.

- Pour calculer la probabilité d'avoir k boules rouges et $n-k$ boules blanches dans un ordre déterminé, on ferait un calcul analogue au précédent pour obtenir finalement le même résultat qu'au (a) (car le dénominateur est déterminé par les nombres successifs de boules dans l'urne et le numérateur correspond au nombre de boules blanches ou rouge au cours des n tirages : ce sont les mêmes qu'au (a) dans un ordre différent),on a donc finalement

$$P\left(k \text{ rouges et } n-k \text{ boules blanches, dans un ordre déterminé}\right)=\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$$

- $(S_n = k)$ est donc la réunion disjointe d'événements incompatibles de même probabilité. Chacun de ces événements correspondant à l'apparition de k boules rouges et des $n-k$ boules blanches dans chacun des ordres possibles, il y en a donc autant que de manières de placer k boules rouges parmi n places possibles, c'est à dire $\binom{n}{k}$.

- Finalement
$$([S_n = k]) = \binom{n}{k} P\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right)$$
et donc
$$P\left([S_n = k]\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

(8) Comme $S_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$, la variable S_n est finie et admet donc une espérance. De plus,
$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{k=0}^{n} kP(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k(k+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k\right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n(2n+1)+3n}{3(n+2)} = \frac{2n(n+2)}{3(n+2)} \\
&= \frac{2n}{3},
\end{aligned}$$
ce qui est bien la valeur attendue.

(9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $P_{[S_n=k]}\left([X_{n+1} = 1]\right)$ est la probabilité de tirer au $n+1$-ième tirage une boule rouge dans une urne qui, après n tirages ayant amené k rouges, contient $n+3$ boules dont $2+k$ sont rouges. On a donc bien
$$P_{[S_n=k]}\left([X_{n+1} = 1]\right) = \frac{k+2}{n+3}.$$

(b) La formule des probabilités totales associée au s.c.e. $\{[S_n = k] : k \in [\![0; n]\!]\}$ fournit
$$\begin{aligned}
P\left([X_{n+1} = 1]\right) &= \sum_{k=0}^{n} P_{[S_n=k]}\left([X_{n+1} = 1]\right) P\left([S_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{n+3} P\left([S_n = k]\right) \\
&= \frac{1}{n+3}\left(\sum_{k=0}^{n} kP\left([S_n = k]\right) + \sum_{k=0}^{n} 2P\left([S_n = k]\right)\right) \\
&= \frac{1}{n+3}\left(E(S_n) + 2\right) \qquad \left(\text{car } \sum_{k=0}^{n} P([S_n = k]) = 1\right) \\
&= \frac{E(S_n)+2}{n+3}.
\end{aligned}$$

(c) Comme $E(S_n) = 2n/3$, on obtient

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$$

ce qui permet d'en déduire $P(X_{n+1} = 0) = 1 - 2/3 = 1/3$. Donc $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(1, 2/3)$. Ainsi, chacune des variables X_i suit la même loi de Bernoulli. (*En revanche, elles ne sont pas indépendantes.*)

Partie IV : Étude d'une fonction de répartition et de sa limite

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

(10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ donc $T_n(\Omega) = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\} \subset [0; 1]$. Ainsi,

$$\forall x < 0, \quad P([T_n \leqslant x]) = 0, \quad \text{et} \quad \forall x > 1, \quad P([T_n \leqslant x]) = 1.$$

(11) Soit $x \in [0; 1]$ et soit n de $\mathbb{N}^*$

$$P([T_n \leqslant x]) = P([S_n \leqslant nx]) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P([S_n = k]) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

d'après le résultat de la Question (7*b*) de la Partie III. Ainsi,

$$P([T_n \leqslant x]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^{\lfloor nx \rfloor + 1} j$$

obtenu par changement d'indice $j = k + 1$. Or,

$$\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$$

donc, avec $m = \lfloor nx \rfloor + 1$ on obtient

$$P([T_n \leqslant x]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{2}$$

Et on peut conclure que, pour $x \in [0; 1]$,

$$P([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}.$$

(12) Commençons par remarquer que

$$\frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)}{(n+1)} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+2)}.$$

Or,

$$\frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)}{(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

Et pour tout $x \in [0; 1]$,

$$nx - 1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \Rightarrow x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x.$$

Ainsi, d'après le théorème de l'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)}{(n+1)} = x.$$

De même,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+2)} = x.$$

Au final,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left([T_n \leqslant x]\right) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2, & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 1, & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$