Math ECG 2. 2023-2024

Mathématiques Appliquées - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
ENC Bessières, Paris 17e.

Devoir Maison n°3

Solution disponible le 01/01

Problème 1

Partie 1 : Réduction d'une matrice carrée

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) On fournit le code Python dont le résultat de l'exécution est fourni ci-après.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[2,-2,2], [1, 1, 2], [-2, 0, -3]])
print (al.matrix_power(A, 3))
```

Affichage Python

```
> > >
[[ 2, -2, 2],
[ 1, 1, 2],
[-2, 0, -3]]
```

(a) Déduire de l'affichage Python ci-dessus une égalité entre deux matrices.
(b) Quelles sont alors les seules valeurs propres possibles de A?

(2) Déterminer le spectre de A.
(3) Déterminer une matrice D diagonale dont les coefficients sont rangés dans l'ordre croissant et une matrice P inversible de première ligne $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$.
(4) Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a $A^k = PD^kP^{-1}$.

Partie 2 : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si (M_n) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices (M_n) *admet une limite coefficient par coefficient*, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $(S_n(M))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

(5) Deux premiers résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de cette partie pour les démonstrations.

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$

(b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient, notées respectivement M et M'.
Montrer que la suite de matrices $(M_n M'_n)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} M_n M'_n = MM'$$

(6) Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonale, alors e^D existe et vaut $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$.

(7) Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calculer M^2 et M^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer M^k.
(b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

(8) Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer M^2.
(b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}$ l'expression de M^k en fonction de k.
(c) Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M.$$

(d) En déduire que e^M existe et que

$$e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M.$$

(9) Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie 1 et on fixe un réel t.

(a) Déduire de la Question (4) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

(b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $e^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$. On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t.

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie 3 : Application à un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) - 3z(t) \end{array}\right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions définies de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

(10) Montrer que X est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$ où A est la matrice introduite dans la Partie 1.

(11) Le système différentiel $(\mathcal{S})$ possède-t-il des équilibres ? Si oui, les déterminer.

(12) Montrer que les solutions du système différentiel $(\mathcal{S})$ peuvent s'écrire sous la forme
$$X(t) = \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t,$$
où α, β, γ sont des constantes réelles et
$$U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(13) On considère les problèmes de Cauchy

$$(\mathcal{P}_1) \quad \left\{\begin{array}{rcl} X'(t) & = & AX(t) \\ & & \\ X(0) & = & \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) \quad \left\{\begin{array}{rcl} X'(t) & = & AX(t) \\ & & \\ X(0) & = & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

(a) (i) Déterminer l'unique solution X_1 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$.
(ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point vis-à-vis du système linéaire $(\mathcal{S})$?

(b) (i) Déterminer l'unique solution X_2 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$.
(ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

(c) On a représenté ci-après les tracés de quatre solutions du système $(\mathcal{S})$. Expliciter quelles figures sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-avant. Justifier la réponse.

(14) On reprend les notations de la Question (3) et on considère une solution X de $(\mathcal{S})$ de la forme
$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t.$$

(a) Expliciter e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) En posant $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, montrer que $X(t) = e^{tA} \cdot C$.

(c) Commenter le résultat de la dernière question, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles du premier ordre à coefficient constant.

Figure 1

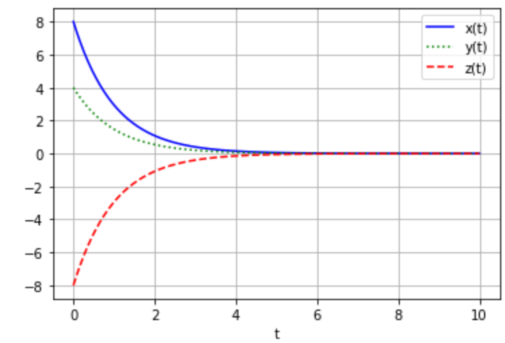


Figure 2

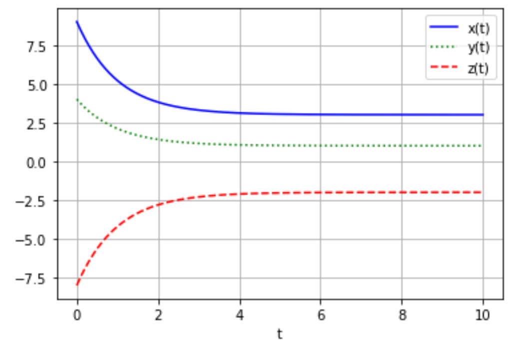


Figure 3

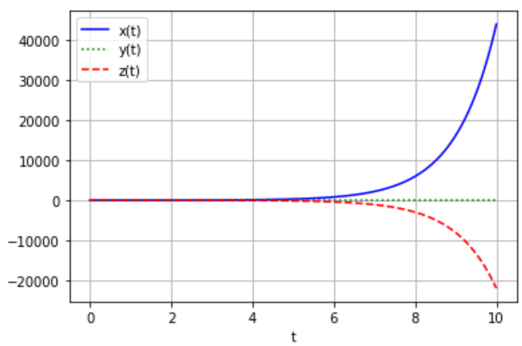
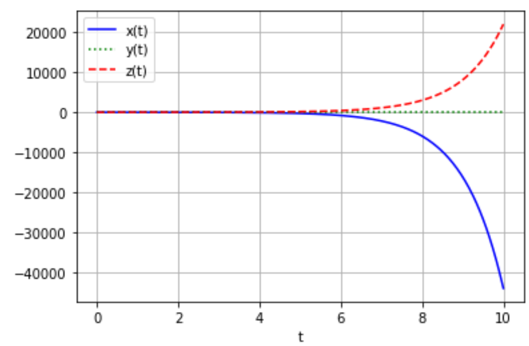


Figure 4



Problème 2

Partie 1 : Étude d'une variable aléatoire à densité

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

(1) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1+e^{-x}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et préciser sa valeur.

(2) En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite de cette section, on note X une variable aléatoire ayant f pour densité.

(3) Donner l'expression de la fonction de répartition F_X de X.

(4) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$. Quelle loi usuelle du cours admet une fonction de répartition vérifiant la même propriété?

(5) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

(a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et dresser ton tableau de variations, limites comprises.
(b) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à préciser et déterminer l'expression de sa bijection réciproque φ^{-1}.
(c) On définit la variable aléatoire Y par $Y = \varphi(X)$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$.
(d) Montrer que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$, alors $2U - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$.
(e) Déduire des questions précédentes l'écriture d'une fonction Python d'en-tête `def simul_X( ):` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X. *On supposera les importations habituelles déjà effectuées.*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

(6) (a) Montrer que f est paire.
(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k f(t)\mathrm{d}t$ converge.
(c) Déduire des questions précédentes que X admet une espérance et préciser sa valeur.
(d) On suppose écrite avec succès la fonction Python de la Question (5e). Que devrait afficher l'exécution des commandes ci-dessus? Justifier la réponse.

```
ech=[simul_X( ) for k in range(1000)]
print(np.mean(ech))
```

Partie 2 : Variables aléatoires symétriques

Une variable aléatoire (discrète ou à densité) Z est dite symétrique si elle suit la même loi que la variable aléatoire $-Z$.

(7) Montrer que si Z est une variable aléatoire ayant pour densité une fonction g paire, alors Z est symétrique.

(8) (a) À quelle condition nécessaire et suffisante une variable aléatoire presque sûrement constante est symétrique.
(b) Donner une exemple de variable aléatoire discrète (ou finie) symétrique non presque sûrement constante.

(c) Quelle loi usuelle à densité du cours est symétrique?

(9) (a) Soit Z une variable aléatoire symétrique. Montrer que

$$P(Z > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(Z = 0))$$

(b) On suppose que Z est une variable aléatoire symétrique, à densité. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une relation entre $P(Z \leq x)$ et $P(Z \leq -x)$.

(10) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité, de fonction de répartition F_Z. On considère une variable aléatoire finie ε de loi $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ supposée indépendante de Z.

(a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(\varepsilon|Z| \leq x) = \dfrac{1}{2}(P(|Z| \geq -x) + P(|Z| \leq x))$.

(b) En déduire que Z et $\varepsilon|Z|$ suivent la même loi.

(11) (a) Soient X une variable aléatoire à densité à valeurs positives admettant une espérance et $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ supposée indépendante de X. Montrer que εX est encore une variable à densité, de densité paire. Que dire de $E(\varepsilon X)$?

(b) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité telle que $|Z|$ admet une espérance. Montrer que Z admet une espérance et que celle-ci est nulle.

(12) Soient $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ supposées indépendantes. On note $W = \varepsilon Y$.

(a) Montrer que W est une variable aléatoire symétrique à densité, de densité h à préciser.

(b) La fonction h est-elle paire ?