



Devoir Maison n°3

Solution

Ce Devoir Maison reprend intégralement le sujet du Devoir Surveillé n°4 (Janvier 2023).

Problème 1

Ce problème est le fruit d'un travail commun avec mes collègues Tom Dutilleuil (Carnot, Paris 17e) et Louis Merlin (Dumas, St Cloud). La partie avec l'exponentielle de matrice s'inspire d'un sujet **HEC**, voie T, de 2007.

Le premier des deux collègues susmentionnés ayant déjà posé ce sujet et rédigé une solution, on y renvoie. Elle est disponible en cliquant [ici](#).

Problème 2

Partie 1 : Étude d'une variable aléatoire à densité

On introduit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

- (1) L'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$ il y a donc *a priori* deux intégrales dont on doit montrer la convergence, sauf si on a lu le reste de l'exercice et anticipé du caractère paire de la fonction f , ce qui permettra de se limiter à l'intégrale entre 0 et $+\infty$. Montrons donc que f est paire dès maintenant. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{e^{-(-x)}}{(1+e^{-(-x)})^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(e^x(e^{-x}+1))^2} = \frac{e^x}{e^{2x}(e^{-x}+1)^2} = f(x)$$

et f est bien paire. Soit maintenant $A > 0$. Comme suggéré par l'énoncé, on pose

$$u = u(t) = 1 + e^{-t} \rightsquigarrow du = -e^{-t} dt$$

Comme u est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; A]$, le changement de variable est licite et donne

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t) dt &= \int_2^{1+e^{-A}} \frac{-du}{u^2} = \int_{1+e^{-A}}^2 \frac{du}{u^2} \\ &= \left[-\frac{1}{u} \right]_{1+e^{-A}}^2 \\ &= \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par parité de f , on a bien la convergence de l'intégrale demandée et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

(2) D'après la question précédente, il reste seulement à vérifier que f est continue (sauf peut-être en un nombre fini de points) et qu'elle est positive partout sur \mathbb{R} . C'est clairement le cas:

- Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto (1 + e^{-x})^2$ sont continues comme combinaisons/puissances de fonctions usuelles définies avec l'exponentielle et la seconde ne s'annule jamais. Par quotient, f est alors continue sur \mathbb{R} .
- Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x , il est immédiat que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Au final, f est bien une densité de probabilité.

Dans la suite de cette section, on note X une variable aléatoire ayant f pour densité.

(3) On va à nouveau utiliser un changement de variable pour calculer $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par poser $B < x$. Par le même changement de variable que précédemment, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_B^x f(t)dt &= \int_{1+e^{-B}}^{1+e^{-x}} \frac{-du}{u^2} \\ &= \left[\frac{1}{u} \right]_{1+e^{-B}}^{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-B}} \\ &\xrightarrow{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

Et on peut alors conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

(4) Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$.

$$\begin{aligned} 1 - F_X(-x) &= 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{1}{1+e^{-x}} \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

Cette propriété de *symétrie* est aussi partagé par la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

(5) Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

(a) La fonction φ est quotient de fonctions usuelles de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, φ est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$$

et φ est strictement croissante sur \mathbb{R} . Comme on a clairement

$$\varphi(x) \sim \frac{e^x}{e^x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \quad \varphi(x) \sim \frac{-1}{1} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$$

on peut dresser le tableau de variations complet de φ :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	
$\varphi(x)$	-1	1

- (b) Par théorème de bijection, φ étant strictement croissante et continue sur \mathbb{R} , elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur $J =]-1, 1[$. De plus, pour tout $y \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) = y &\iff \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \\
 &\iff e^x - 1 = y(e^x + 1) \\
 &\iff e^x(1 - y) = 1 + y \\
 &\iff e^x = \frac{1 + y}{1 - y} \\
 &\iff x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)
 \end{aligned}$$

et on peut alors conclure que

$$\varphi^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right).$$

- (c) On définit la variable aléatoire Y par $Y = \varphi(X)$. On détermine la loi de Y en explicitant sa fonction de répartition mais commençons par observer que, φ étant à valeurs dans $] - 1, 1[$, on a $Y(\Omega) =] - 1, 1[$ et donc, pour tout $x \leq -1$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$ et pour tout $x \geq 1$, $F_Y(x) = 1$. Pour $x \in] - 1, 1[$, on a

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(\varphi(X) \leq x) \\
 &= P(X \leq \varphi^{-1}(x)) \quad \text{car } \varphi \text{ bijection croissante} \\
 &= F_X(\varphi^{-1}(x)) = F_X\left(\ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{1 + \exp\left(-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\
 &= \frac{x + 1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Au final, on a } F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x + 1}{2}, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}([-1; 1])$ et on peut donc conclure que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1; 1])$.

- (d) Question classique sur la transformation affine d'une loi uniforme. A savoir faire *fingers in the nose*. Notons $V = 2U - 1$ et observons que $V(\Omega) = [-1, 1]$. Ainsi $F_V(x) = 0$ si $x < -1$ et $F_V(x) = 1$ si $x > 1$. Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = P(2U - 1 \leq x) = P\left(U \leq \frac{x+1}{2}\right) = F_U\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \frac{x+1}{2}, \end{aligned}$$

car si $x \in [-1, 1]$ alors $(x+1)/2 \in [0; 1]$. On reconnaît encore l'expression de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([-1; 1])$ et on a bien le résultat demandé.

- (e) C'est un processus classique de simulation par inversion. On va simuler U (avec `rd.random()`) puis simuler V grâce à la question précédente et $\varphi^{-1}(V)$ renverra une simulation de X toujours d'après les questions précédentes.

```
def simul_X( ):
    U=rd.random()
    V=2*U-1
    return np.log((1+V)/(1-V))
```

- (6) (a) On a déjà répondu à cette question lors de la toute première question du problème à laquelle on renvoie.
- (b) Cette intégrale est impropre en $+\infty$. Sur $[0; 1]$ il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue. On ne s'intéresse donc à la convergence que de l'intégrale sur $[1, +\infty[$. Or, par croissance comparée, il est immédiat de voir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$t^k f(t) = \frac{t^k e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \sim t^k e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \rightarrow +\infty$$

et bien sûr, par critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Par critère de comparaison par négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on a bien convergence de l'intégrale étudiée.

- (c) On sait que

$$X \text{ admet une espérance} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \text{ converge absolument}$$

Or, comme f est paire, la fonction $t \mapsto t f(t)$ est impaire. On sait par la question précédente que l'intégrale, sur $[0; +\infty[$ de $t f(t)$ converge. On peut donc conclure que $E(X)$ existe et que

$$E(X) = 0.$$

- (d) Les commandes proposées créent une liste de 1000 simulations de X et affichent la moyenne des valeurs obtenues. Il s'agit donc d'une valeur approchée de l'espérance de X , qu'on sait être égale à 0. La valeur affichée devrait donc être très proche de 0.

Partie 2 : Variables aléatoires symétriques

Une variable aléatoire (discrète ou à densité) Z est dite symétrique si elle suit la même loi que la variable aléatoire $-Z$.

- (7) Soit Z une variable aléatoire de densité g paire. Alors, en effectuant le changement de variable affine (donc licite) $u = -t$ qui donne $du = -dt$, on a

$$\begin{aligned} F_{-Z}(x) &= P(-Z \leq x) = P(Z \geq -x) \\ &= \int_{-x}^{+\infty} g(t)dt = \int_x^{-\infty} g(-u)(-du) \\ &= \int_{-\infty}^x g(u)du \quad (\text{car } g \text{ est paire}) \\ &= P(Z \geq x) = F_Z(x) \end{aligned}$$

et $-Z$ suit bien la même loi que Z ce qui veut dire que Z est symétrique.

- (8) (a) Si $Z = a$ est une v.a constante symétrique alors $-Z = -a = Z = a$ et $a = 0$. Réciproquement, il est clair que la v.a constante nulle est symétrique. C'est la seule variable aléatoire constante symétrique.
- (b) Pour chercher ce type d'exemple, on commence par raisonner avec des choses simples. On veut une variable aléatoire finie mais pas constante. On va donc chercher une v.a X prenant 2 valeurs a et b , comme on veut que $-X$ ait la même loi (et donc le même univers image) que X , il faut que $\{-a; -b\} = \{a, b\}$. On pense tout de suite à prendre $a = -1$ et $b = 1$. Ensuite on veut

$$P(X = 1) = P(-X = 1) = P(X = -1).$$

Ceci impose la probabilité ci-dessus soit égale à $1/2$ et donc que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$. Il est immédiat de vérifier que cette loi satisfait bien la définition de v.a symétrique.

- (c) Bien entendu on a tout de suite, dès la définition, pensé à la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Sa fonction de densité étant paire, elle vérifie bien la définition de variable aléatoire symétrique.

- (9) (a) Soit Z une variable aléatoire symétrique. Comme

$$[Z \neq 0] = [Z < 0] \cup [Z > 0]$$

et que cette union est disjointe, on a

$$P(Z = 0) = 1 - P(Z \neq 0) = 1 - (P(Z < 0) + P(Z > 0)) = 1 - 2P(Z > 0)$$

car Z est symétrique: en effet, $P(Z < 0) = P(-Z > 0) = P(Z > 0)$. Il suit bien que

$$P(Z > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(Z = 0)).$$

- (b) On suppose que Z est une variable aléatoire symétrique, à densité. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$P(Z \leq -x) = P(-Z \geq x) = 1 - P(-Z < -x) = 1 - P(Z < x) = 1 - P(Z \leq x)$$

car Z et $-Z$ suivent la même loi et sont à densité.

- (10) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité, de fonction de répartition F_Z . On considère une variable aléatoire finie ε de loi $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ supposée indépendante de Z .

- (a) Notons que Z et ε étant indépendantes, les variables $|Z|$ et ε le sont encore par le lemme des coalitions. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[\varepsilon = 1], [\varepsilon = -1]\}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(\varepsilon|Z| \leq x) &= P(\varepsilon|Z| \leq x \cap [\varepsilon = 1]) + P(\varepsilon|Z| \leq x \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P(|Z| \leq x \cap [\varepsilon = 1]) + P(-|Z| \leq x \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P(|Z| \leq x)P(\varepsilon = 1) + P(|Z| \geq -x)P(\varepsilon = -1) \quad \text{par indépendance de } \varepsilon \text{ et } |Z| \\ &= \frac{1}{2} (P(|Z| \geq -x) + P(|Z| \leq x)), \end{aligned}$$

ce qui est la formule demandée.

- (b) Commençons par voir que

$$P(|Z| \geq -x) = P(Z \geq -x) + P(Z \leq x) = P(-Z \leq x) + P(Z \leq x) = 2P(Z \leq x)$$

car Z est symétrique. De plus, toujours car Z est symétrique,

$$P(|Z| \leq x) = P(Z \leq x) - P(Z < -x) = P(Z \leq x) - 1 + P(Z \leq x) = 2P(Z \leq x) - 1.$$

On distingue alors deux cas :

- Si $x \geq 0$, alors $P(|Z| \geq -x) = 1$, et il suit que

$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = \frac{1}{2} (P(|Z| \geq -x) + P(|Z| \leq x)) = \frac{1}{2} (1 + 2P(Z \leq x) - 1) = P(Z \leq x).$$

- Si $x < 0$, alors $P(|Z| \leq x) = 0$ et

$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = \frac{1}{2} (P(|Z| \geq -x) + 0) = \frac{1}{2} (2P(Z \leq x)) = P(Z \leq x)$$

Dans les deux cas

$$P(\varepsilon|Z| \leq x) = P(Z \leq x)$$

et on conclut Z et $\varepsilon|Z|$ suivent la même loi.

- (11) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par la FPT appliquée au s.c.e $\{[\varepsilon = 1], [\varepsilon = -1]\}$,

$$\begin{aligned} P(\varepsilon X \leq x) &= P([\varepsilon X \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([\varepsilon X \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P([X \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([X \geq -x] \cap [\varepsilon = 1]) \\ &= \frac{1}{2} (F_X(x) + 1 - F_X(-x)) \end{aligned}$$

Comme X est à densité, F_X est continue partout et de classe \mathcal{C}^1 partout (sauf peut être en un nombre fini de point). Par composition avec $x \mapsto -x$ et par somme, il en est donc de même pour $F_{\varepsilon x}$ et la variable εX est donc à densité. Une densité s'obtient par

$$f_{\varepsilon X}(x) = F'_{\varepsilon x}(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)).$$

Notamment cette densité est paire. Comme X admet une densité et que X est à valeurs positives, on sait que $f(t) = 0$ si $t < 0$ et que

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt$$

converge. Observant maintenant que $t \mapsto t f_{\varepsilon X}(t)$ est impaire et que, pour $t \geq 0$

$$t f_{\varepsilon X}(t) = \frac{1}{2} t f(t)$$

on a donc la convergence de $\int_0^{+\infty} t f_{\varepsilon X}(t) dt$ ou encore l'existence de $E(\varepsilon X)$ qui vaut donc 0.

On pouvait l'anticiper, l'espérance du produit de variables indépendantes est égale au produit des espérances, mais bien sûr $E(\varepsilon) = 0$. Sauf que... ce résultat est vrai si les deux variables sont toutes deux discrètes (ou toutes deux continues)....

(b) Soit Z une variable aléatoire symétrique à densité telle que $|Z|$ admet une espérance. D'après la question précédente, en prenant $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ indépendante de Z (et donc indépendante de $|Z|$ par le lemme des coalitions), $\varepsilon|Z|$ admet une espérance qui est nulle. Or on a vu plus haut que $\varepsilon|Z|$ et Z ont dans ce cas la même loi, donc Z admet une espérance et celle-ci est nulle.

(12) Soient $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1; 1\})$ supposées indépendantes. On note $W = \varepsilon Y$.

(a) Encore une fois, on passe par la fonction de répartition de W et la formule des probabilités totales avec le même s.c.e que précédemment. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, on a $W(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_W(x) &= P(W \leq x) = P([\varepsilon Y \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([\varepsilon Y \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= P([Y \leq x] \cap [\varepsilon = 1]) + P([-Y \leq x] \cap [\varepsilon = -1]) \\ &= \frac{1}{2} (P(Y \leq x) + 1 - P(Y \leq -x)) \end{aligned}$$

Il faut alors distinguer $x \geq 0$ et $x < 0$.

- Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ et $P(Y \leq -x) = 0$ ce qui donne

$$F_W(x) = \frac{1}{2} (2 - e^{-\lambda x})$$

- Si $x < 0$ alors $-x > 0$ et $P(Y \leq x) = 0$ ce qui donne

$$F_W(x) = \frac{1}{2} (e^{\lambda x})$$

Bilan

$$F_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} (2 - e^{-\lambda x}), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On commence par bien dire que F_W est bien continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et sur \mathbb{R}_- pour garantir que W est une variable à densité. On vérifie qu'elle est symétrique

$$P(-W \leq x) = P(W \geq -x) = 1 - P(W \leq -x)$$

On distingue encore $x \geq 0$ et $x < 0$.

- Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ et on a

$$P(-W \leq x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}$$

- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et on a

$$P(-W \leq x) = 1 - \frac{1}{2} (2 - e^{\lambda x}) = \frac{1}{2} e^{\lambda x}$$

Dans les deux cas, $F_{-W}(x) = F_W(x)$ et W est bien symétrique.
Une densité de W est donnée par

$$h(x) = F'_W(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}e^{\lambda x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}.$$

(b) Oui, il est immédiat de voir que la fonction h est encore paire.